



کتاب آنلاین®

مرجع تخصصی عرضه آنلاین کتاب

www.ketabonline.ir

فصل اول

مجموعه‌ها

- مجموعه و زیر مجموعه
- تعداد زیر مجموعه‌ها
- زبان ریاضی
- اشتراک، اجتماع و تفاضل دو مجموعه
- جبر مجموعه‌ها
- بسته بودن مجموعه‌ها
- بخش ویژه



تاریخچه‌ی مجموعه

نظریه‌ی «مجموعه‌ها» شاخه‌ای از منطق ریاضی است و اغلب در مورد اشیاء مرتبط با ریاضی به کار می‌رود. مطالعه بر روی نظریه‌ی مجموعه‌ها توسط «جورج کانتور» و «ریچارد ددکیند» حدود سال ۱۷۷۰ میلادی (حدود ۲۴۵ سال پیش) شروع شد. مسائل مربوط به «بی‌نهایت‌ها» از پنج قرن قبل از میلاد، فکر دانشمندان را مشغول کرده بود و نظریه‌ی مجموعه‌ها با وارد شدن در این موضوع و ارائه‌ی درک مدرن از «بی‌نهایت‌ها»، به شهرت رسید. بعدها نظریه‌ی مجموعه‌ها با تناقض‌هایی که در آن به وجود آمد، کمی به ضعف گرایید و برخی دانشمندان را مخالف خود یافت؛ مانند این تناقض که مهم‌ترین تناقض در مجموعه‌هاست:

«مجموعه‌ی تمام مجموعه‌هایی که عضو خودشان نیستند». برای درک این تناقض به مثال کاربردی زیر توجه کنید:

در دهکده‌ای فقط یک ریش تراش است. او فقط ریش کسانی را می‌تراشد که ریش خود را نمی‌تراشند! در این صورت می‌توانید بگویید ریش ریش تراش را چه کسی می‌تراشد؟

اگر او ریش خود را نتراشد، باید نزد ریش تراش دهکده برود (که خودش هست) و اگر او ریش خود را بتراشد، نباید توسط ریش تراش (یعنی خودش) ریشش تراشیده شود!!!

مفاهیم اولیه و مقدماتی

تلاش برای تعریف مجموعه شما را به جایی نمی‌رساند! مجموعه، مفهومی تعریف‌نشده‌ی است؛ مثل نقطه و خط در هندسه که تعریف نمی‌شوند؛ هر مجموعه دارای ویژگی‌های زیر است:

۱ اعضای مجموعه باید مشخص باشند تا عضویت در یک مجموعه سلیقه‌ای نباشد؛ مثلاً «بچه‌های خوب کلاس» یک مجموعه را مشخص نمی‌کند، زیرا خوب بودن، سلیقه‌ای است ولی اگر بگوییم «دانش‌آموزان معدل بیست کلاس» یک مجموعه را مشخص کرده‌ایم.

۲ عضوهای هر مجموعه را داخل آکولاد قرار داده و مجموعه را با حروف بزرگ انگلیسی نامگذاری می‌کنیم، مثل $A = \{۱ و ۲\}$ و می‌نویسیم مثلاً $۲ \in A$ (نماد $\in$ برای عضو بودن به کار می‌رود).

۳ در مجموعه تکرار عضو بی‌اثر است، به عنوان مثال مجموعه‌ی $\{۱, ۱, ۱, ۱, ۵, ۵\}$ مجموعه‌ای دو عضوی است که اعضای آن ۱ و ۵ هستند. $\{۱, ۱, ۱, ۱, ۵, ۵\} = \{۱, ۵\}$

۴ در مجموعه، ترتیب عضو مهم نیست! مثلاً $\{۷, ۵, ۲\} = \{۲, ۵, ۷\}$ و مگر آنکه الگوی عددی را برساند!

۵ عضو عضو مجموعه، لزوماً عضو آن نیست! به عنوان مثال اگر $A = \{۱, ۲, \{۵\}\}$ باشد، $۵ \notin A$ (بخوانید متعلق نیست، یا ۵ عضو A نیست!) بلکه باید بنویسیم: $\{۵\} \in A$.

مجموعه‌ی تهی: مجموعه‌ی بدون عضو را مجموعه‌ی تهی (خالی) می‌نامیم و با علامت $\{\}$ یا $\{\emptyset\}$ نشان می‌دهیم؛ مثلاً مجموعه‌ی اعداد طبیعی بین ۰ و ۱ مجموعه‌ی تهی است! دقت کنید مجموعه $\{\emptyset\}$ یا $\{۰\}$ تهی نیستند و هر دو مجموعه‌ی یک عضوی به حساب می‌آیند.

مجموعه‌ی مرجع: مجموعه‌ی تمام اعضای مورد بحث را مجموعه‌ی مرجع (جهانی، عام) می‌نامیم و با حرف M (یا U) نشان می‌دهیم.

دو مجموعه‌ی مساوی: دو مجموعه را مساوی می‌گوییم اگر هر عضو A در B باشد و هر عضو B در A باشد و می‌نویسیم: $A = B$

پرسش نمونه

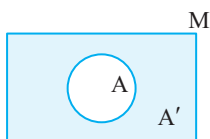
مقدار a و b چقدر باشد تا دو مجموعه A و B مساوی شوند؟ $A = \{a+1, -11, b\}$, $B = \{a-2, 7, -11\}$

راه حل: عدد -11 که در هر دو مجموعه وجود دارد، اگر $a+1$ برابر با $a-2$ قرار دهیم، a حذف شده و نتیجه می شود

$a-2 = +1$ و این امکان ندارد؛ پس $a+1$ را مساوی 7 قرار می دهیم و نتیجه می شود $a = 6$ و نیز b باید با $a-2$

مساوی شود که نتیجه می شود: $b = a-2 = 6-2 = 4$

متمم مجموعه: متمم یک مجموعه مثل A را با نماد A' نشان می دهیم و اعضای آن عبارتند از تمام اعضای M که در A نیستند.



مثال: اگر $M = \{1, 2, 3, \dots, 10\}$ و $A = \{2, 4, 6, 8, 10\}$ آن گاه: $A' = \{1, 3, 5, 7, 9\}$

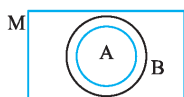
نکته

نکات کوچولو! در مورد متمم یک مجموعه:

$$(A')' = A \quad \emptyset' = M \quad M' = \emptyset' \quad (A')' = A \quad \emptyset' = M \quad M' = \emptyset' \quad (A')' = A \quad \emptyset' = M \quad M' = \emptyset'$$

زیرمجموعه

مجموعه A را زیرمجموعه B می گوئیم هرگاه هر عضوی از A در B باشد و این گونه می نویسیم: $A \subseteq B$ برای درک بهتر

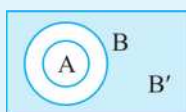


مجموعه ها و اعمال روی آن ها از نمودارهایی که به نمودار ون معروف هستند استفاده می کنیم. در نمودار ون

معمولاً مجموعه مرجع را با مستطیل و زیرمجموعه ها را با دایره هایی داخل مستطیل نشان می دهیم.

نکته

۱) $\emptyset$ زیرمجموعه هر مجموعه ای هست! $\emptyset \subseteq A$ و هر مجموعه زیرمجموعه خودش هست! $A \subseteq A$



۲) اگر $A \subseteq B$ باشد، آن گاه $B' \subseteq A'$ برای درک بیشتر، نمودار ون مقابل را ببینید!

(A' را خودتان تجسم کنید، هاشور نزدیکیم که شلوغ نشود!)

تعداد زیرمجموعه ها:

هر مجموعه n عضوی دقیقاً 2^n زیرمجموعه دارد. چرا؟

فرض کنید می خواهیم تمام زیرمجموعه های یک مجموعه n عضوی را بنویسیم. اولین عضو مجموعه می تواند در زیرمجموعه باشد یا نباشد (دو حالت دارد). برای عضو دوم نیز دو حالت وجود دارد و... تا آخرین عضو. طبق اصل ضرب تعداد کل حالت های نوشتن

$$\text{عضو } n \rightarrow \underbrace{2 \times 2 \times 2 \times \dots \times 2}_{n \text{ بار}} = 2^n$$

زیرمجموعه به شکل روبه رو است:

پرسش نمونه

۱ مجموعه‌ای ۳۲ زیرمجموعه دارد. این مجموعه چند عضو دارد؟

راه‌حل: تعداد زیرمجموعه‌ها از رابطه‌ی 2^n به دست می‌آید؛ پس: $2^n = 32$ در نتیجه: $n = 5$.

۲ مجموعه‌ی $\left\{1^2, 2^2, (-2)^2, \frac{1}{2}, \frac{2}{2}\right\}$ چند زیرمجموعه دارد؟

راه‌حل: این مجموعه ۵ عضوی نیست؛ زیرا $1 = \frac{2}{2}$ ، $1 = 2^2 = (-2)^2$ است؛ یعنی ۲ عضو آن تکراری است؛ پس

مجموعه سه عضو دارد؛

$$\left\{1, 4, \frac{1}{2}\right\} = \left\{1, 4, \frac{1}{2}\right\} \rightarrow \text{سه عضوی است} \quad 2^3 = 8 \text{ زیرمجموعه}$$

۳ مجموعه‌ی $\{a, b, c, d, e\}$ چند زیرمجموعه دارد که شامل a و b باشد ولی شامل e نباشد؟

راه‌حل: برای اعضا e, b, a فقط یک حالت وجود دارد؛ ولی برای سایر اعضا دو حالت انتخاب داریم؛

$$\text{پس تعداد زیرمجموعه‌ها برابر است با: } 1 \times 1 \times 2 \times 2 \times 1 = 4$$

زیرمجموعه‌ی محض: تمام زیرمجموعه‌های یک مجموعه به جز خودش را «زیرمجموعه‌ی محض» می‌نامیم، بنابراین هر مجموعه‌ی

n عضوی $2^n - 1$ زیرمجموعه‌ی محض دارد.

تعداد زیرمجموعه‌های K عضوی: در هر مجموعه‌ی n عضوی، تعداد زیرمجموعه‌های ۱ عضوی برابر با n است، دلیلش واضح است،

اگر هر عضو را داخل یک آکولاد قرار دهیم، یک زیرمجموعه ۱ عضوی تشکیل می‌شود؛ مثلاً یک مجموعه ۱۰ عضوی، دقیقاً ۱۰ زیرمجموعه‌ی یک عضوی دارد.

- تعداد زیرمجموعه‌های ۲ عضوی هر مجموعه‌ی n عضوی، برابر است با $\frac{n(n-1)}{2}$ (مثل فرمول تعداد پاره خط‌ها).

- تعداد زیرمجموعه‌های سه عضوی برابر است با: $\frac{n(n-1)(n-2)}{6}$. برای اثبات درستی به فصل بعد مراجعه کنید!

نکته



تعداد زیرمجموعه‌های K عضوی یک مجموعه n عضوی برابر است با $\frac{n!}{K!(n-K)!}$ علامت! هم برای هر عدد

$$n! = 1 \times 2 \times 3 \times \dots \times n$$

طبیعی چنین تعریف می‌شود:

پرسش نمونه

۱ مجموعه‌ی $A = \{-2, 1, -1, 0, 2, 5\}$ چند زیرمجموعه‌ی ۲ عضوی و چند زیرمجموعه‌ی ۳ عضوی دارد؟

$$\text{راه‌حل: تعداد زیرمجموعه‌های دو عضوی: } n = 6 \rightarrow \frac{6 \times 5}{2} = 15$$

تعداد زیرمجموعه‌های سه عضوی: $n = 6 \Rightarrow \frac{6 \times 5 \times 4}{6} = 20$

۲) مجموعه‌ی A یک مجموعه‌ی ۱۰۰ عضوی است. A چند زیرمجموعه‌ی ۹۹ عضوی دارد؟

راه‌حل: برای انتخاب ۹۹ نفر، کافی است یک نفر را کنار بگذاریم؛ پس انتخاب ۹۹ نفر از ۱۰۰ نفر مثل انتخاب یکی از ۱۰۰ نفر است؛ یعنی تعداد زیرمجموعه‌های ۹۹ عضوی، برابر است با تعداد زیرمجموعه‌های ۱ عضوی؛ یعنی ۱۰۰ تا و نکته‌ی زیر حاصل می‌شود:

نکته: تعداد زیرمجموعه‌های $n - k$ عضوی یک مجموعه‌ی n عضوی، برابر است با تعداد زیرمجموعه‌های k عضوی؛ مثلاً برای مجموعه‌ی A که ۱۰۰ عضوی بود (در مثال قبل)، تعداد زیرمجموعه‌های ۹۸ عضوی، برابر با تعداد زیرمجموعه‌های ۲ عضوی است؛ (زیرا با کنار گذاشتن ۲ عضو، ۹۸ عضو می‌ماند) یا مثلاً تعداد زیرمجموعه‌های ۹۷ عضوی، با تعداد زیرمجموعه‌های ۳ عضوی برابر است.

نکته



وقتی زیرمجموعه‌های یک مجموعه را می‌نویسیم، هر عضو آن در نیمی از زیرمجموعه‌ها بوده و در نیم دیگر آن‌ها نیست! (چرا؟)

زبان ریاضی



ابتدا باید مجموعه‌های مهم عددی را بشناسیم؛ اگر چه با بیشتر آن‌ها آشنا بوده‌اید:

اعداد طبیعی: $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ (از کلمه‌ی Natural به معنی طبیعت)

اعداد حسابی: $\mathbb{W}$ یا $\mathbb{I}$ (از کلمه‌ی Integer یا Whole)

اعداد صحیح: $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$ (از کلمه‌ی آلمانی Zahlen)

اعداد گویا: $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0 \right\}$ (از کلمه‌ی Quotient)

اعداد حقیقی: $\mathbb{R}$ (از کلمه‌ی Real) (درمورد اعداد حقیقی در فصل ۳ کتاب کاملاً بحث شده است)

یکی از روش‌های نمایش یک مجموعه «زبان ریاضی» است. در این روش ابتدا باید الگویی برای همه‌ی اعضا داشته باشیم و آن الگو را با کمک یک مجموعه‌ی مشخص‌تر مثل $\mathbb{N}$ (اعداد طبیعی) یا $\mathbb{W}$ (اعداد حسابی) ویا... بیان کنیم. به مثال‌های زیر توجه کنید:

پرسش نمونه

مجموعه‌های زیر را به زبان ریاضی بنویسید.

$$A = \{5, 6, 7, \dots\} \quad B = \{6, 8, 10, \dots, 100\} \quad C = \{1, 3, 7, 15, \dots\}$$

$$D = \{8, 15, 22, \dots, 141\} \quad E = \{\frac{1}{4}, \frac{2}{5}, \frac{3}{6}, \dots\} \quad F = \{1, 11, 111, 1111, \dots\}$$

$$G = \{-\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots\} \quad H = \{2, 6, 12, 20, \dots\}$$

$$A = \{5, 6, 7, \dots\} = \{x | x \in \mathbb{N}, x \geq 5\} \quad \text{راه حل:}$$

$$B = \{5, 8, 10, 12, \dots, 100\} = \{2x | x \in \mathbb{N}, 2 < x < 50\} \quad \text{یا} \quad \{2x | x \in \mathbb{N}, 3 \leq x \leq 50\}$$

C: این مثال کمی سخت تر شده است؛ ولی برای تشفی، به هر عضو، ۱ واحد اضافه کنید، اعداد ۲، ۴، ۸ و ۱۶ و...

$$C = \{2^n - 1 | n \in \mathbb{N}\} \quad \text{به دست می آید که توانهای ۲ هستند، پس می توان نوشت:}$$

$$D: \text{یک واحد از هر عضو کم شود مضارب ۷ می شوند:} \quad D = \{7x + 1 | x \in \mathbb{N}, x \leq 20\}$$

در این مثال اعداد، ۷ تا ۷ اضافه می شوند؛ در نتیجه تماماً به مضارب ۷ ربط دارند؛ یعنی تماماً در قسمت زبان

ریاضی، $7x$ وجود دارد. با کمی دقت معلوم می شود هر عدد از مضرب ۷ یک واحد بیشتر است؛ یعنی: $7x + 1$

. اولین x باید ۱ باشد که $7x + 1$ عدد ۸ را تولید کند و آخرین مقدار x هم باید ۲۰ باشد که $7 \times 20 + 1$ برابر

۱۴۱ (آخرین عضو مجموعه عدد ۱۴۱ است و اولین عضو ۸)

$$E: \text{اگر دقت کنید در همه کسرها مخرج، ۳ واحد از صورت بزرگ تر است، پس:} \quad E = \{\frac{n}{n+3} | n \in \mathbb{N}\}$$

F: این مجموعه یک کلید دارد. اعداد ۹، ۹۹، ۹۹۹، ... اگر بر ۹ تقسیم شوند اعداد ۱، ۱۱، ۱۱۱، ... می دهند.

$$F = \{\frac{10^n - 1}{9} | n \in \mathbb{N}\}$$

G: برای علامت - باید از $(-1)^n$ استفاده کرد؛

$$G = \{\frac{(-1)^n}{n} | n \in \mathbb{N}\}$$

$$H: \text{اعداد را به این شکل می نویسیم:} \quad H = \{x(x+1) | x \in \mathbb{N}\} \rightarrow H = \{1 \times 2, 2 \times 3, 3 \times 4, 4 \times 5, \dots\}$$

مجموعه‌ی نامتناهی: مجموعه‌ای که تعداد اعضای آن بی شمار باشد را «مجموعه‌ی نامتناهی» می نامیم؛ مثل $\mathbb{N}$ یا $\mathbb{Z}$ ؛ یا

مجموعه‌ی اعداد اول، اگر مجموعه‌ای چنین نباشد، به آن متناهی می گوئیم؛ مثل $A = \{1, 2, 3, \dots, 1000\}$ یا مجموعه‌ی $B = \{1\}$ که

مجموعه‌های متناهی هستند.

نکته



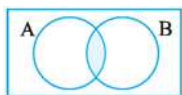
۱) اگر B مجموعه‌ای نامتناهی باشد و $B \subset A$ باشد، حتماً A نیز نامتناهی است؛ به بیان دیگر، اگر A زیرمجموعه‌ای

نامتناهی داشته باشد، خود نیز، مجموعه‌ای نامتناهی است.

۲) اگر A مجموعه‌ای متناهی باشد و $B \subset A$ آن گاه، B نیز متناهی است. یعنی هر یک از زیرمجموعه‌های یک مجموعه‌ی

متناهی، متناهی هستند.

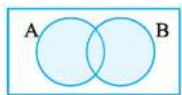
اشتراک دو مجموعه: اعضای که در دو مجموعه‌ی A و B مشترک باشند، مجموعه‌ی جدیدی تشکیل می‌دهند که به آن اشتراک A



$$A \cap B = \{x | x \in A, x \in B\}$$

و B می‌گوییم و با نماد $A \cap B$ نشان می‌دهیم:

اجتماع دو مجموعه: اعضای که یا در A باشند یا در B (یا در هر دو) و با نماد $A \cup B$ نشان می‌دهیم:



$$A \cup B = \{x | x \in A \text{ یا } x \in B\}$$

پرسش نمونه

اگر $A = \{1, 2, 3\}$ و $B = \{4, 7\}$ و $C = \{2, 3, 4, 5, 6\}$ باشد، هر عبارت را با نوشتن اعضا نمایش دهید.

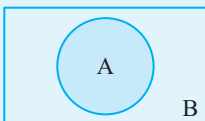
$$A \cap B, A \cap C, A \cap B \cap C$$

$$A \cup B, A \cup C, A \cup B \cup C$$

$$A \cap B = \emptyset, A \cap C = \{2, 3\}, A \cap B \cap C = \emptyset \quad \text{راه حل: طبق تعریف‌هایی که گفته شد:}$$

$$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 7\}, A \cup C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, A \cup B \cup C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$$

نکته



۱ اگر $A \subseteq B$ باشد، آن گاه واضح است که: $A \cap B = A$, $A \cup B = B$

۲ دو مجموعه A و B را جدا از هم می‌گوییم: اگر $A \cap B = \emptyset$ باشد.

۳ اگر M مجموعه مرجع باشد و A مجموعه‌ای دلخواه، آن گاه:

$$\begin{array}{l} (1) \\ A \cup M = M \\ A \cap M = A \end{array}$$

$$\begin{array}{l} (2) \\ A \cup A = A \\ A \cap A = A \end{array}$$

$$\begin{array}{l} (3) \\ A \cup \emptyset = A \\ A \cap \emptyset = \emptyset \end{array}$$

$$\begin{array}{l} (4) \\ A \cup A' = M \\ A \cap A' = \emptyset \end{array}$$

قوانین جبر مجموعه‌ها:

همان طور که دو عمل ضرب و جمع در درس حساب یا جبر قواعدی برای محاسبه دارند، در بخش مجموعه‌ها نیز برای اشتراک و

اجتماع، قوانینی وجود دارد که به کمک آن، عبارت‌های ترکیبی از مجموعه‌ها را ساده می‌کنیم:

$$\begin{cases} A \cap B = B \cap A \\ A \cup B = B \cup A \end{cases}$$

۱ جابه‌جایی:

۲ شرکت پذیری (انجمنی):

$$\begin{cases} A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C \\ A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C \end{cases}$$

$$\begin{cases} A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C) \\ A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \end{cases}$$

۳ توزیع پذیری (پخش):

$$\begin{cases} A \cap (A \cup B) = A \\ A \cup (A \cap B) = A \end{cases}$$

۴ جذب:

$$\begin{cases} (A \cap B)' = A' \cup B' \\ (A \cup B)' = A' \cap B' \end{cases}$$

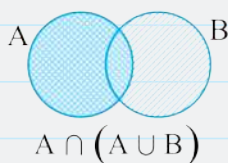
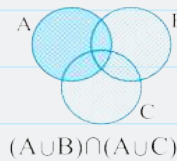
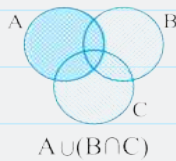
۵ قانون دمورگان:

پرسش نمونه

۱) درستی قانون (۳) را در نمودار هندسی (ون) نشان دهید.

راه حل: می‌فواهیم نشان دهیم: $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ ؛ در این صورت هر طرف تساوی را روی

یک شکل نشان می‌دهیم؛



۲) درستی قانون جذب را با نمودار ون و نیز با جبر مجموعه‌ها نشان دهید:

راه حل: نشان می‌دهیم $A \cap (A \cup B) = A$

با نمودار ون:

با جبر مجموعه‌ها: ابتدا در سمت چپ تساوی به جای A می‌نویسیم $A \cup \emptyset$ و سپس باتوجه به عکس قاعده‌ی توزیع پذیری داریم:

عکس قاعده‌ی توزیع پذیری:

$$A \cap (A \cup B) = (A \cup \emptyset) \cap (A \cup B) = A \cup (\emptyset \cap B) = A \cup \emptyset = A$$

اثبات شکل دیگر قانون جذب بر عهده‌ی دانش‌آموزان عزیز است.

۳) عبارتهای زیر را با کمک قواعد جبر مجموعه‌ها ساده کنید.

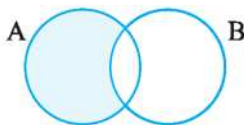
الف) $A \cap (B \cup A')$ ب) $(A \cup B) \cap (A' \cap B)'$ ج) $(A \cap B) \cup (A \cap B \cap C)$

الف) $A \cap (B \cup A') = (A \cap B) \cup (A \cap A') = (A \cap B) \cup \emptyset = A \cap B$

ب) $(A \cup B) \cap (A' \cap B)' = (A \cup B) \cap (A \cup B') = A \cup (B \cap B') = A \cup (\emptyset) = A$

ج) $A \cap B = K \rightarrow K \cup (K \cap C) = K = A \cap B$ قانون جذب

تفاضل دو مجموعه:



اگر A و B دو مجموعه‌ی دلخواه باشد، $A - B$ را تفاضل دو مجموعه می‌نامیم و عبارت است

از تمام اعضای A که در B هستند، ولی در B نیستند: $A - B = \{x | x \in A, x \notin B\}$.

پرسش نمونه

اگر $A = \{1, 2, 3, 4\}$ و $B = \{3, 4, 5\}$ و $C = \{1, 2\}$ باشد، حاصل هر عبارت زیر را با نوشتن اعضا نشان

دهید.

الف) $A - B$ ب) $B - A$ ج) $C - A$

د) $C - B$ ه) $B - C$

راه حل: سعی کنید از جواب‌های زیر نکات کلی نتیجه‌گیری کنید، سپس نکات بعری را ببینید:

برای مقایسه، اعضای مشترک را در مجموعه‌ی اولی فقط می‌زنیم:

(الف) $A - B = \{1, 2\}$ (ب) $B - A = \{5\}$

(ج) $C - A = \{\emptyset\}$ (د) $C - B = \{1, 2\} = C$

(ه) $B - C = \{3, 4, 5\} = B$

نکته

اگر $A \subseteq B$ باشد، آن‌گاه: $A - B = \emptyset$

اگر $A \cap B = \emptyset$ باشد، (A و B جدا از هم‌اند) آن‌گاه:

نکته‌های کوچک! ... ولی مهم!

$$\begin{cases} A - B = A \\ B - A = B \end{cases}$$

$$\begin{cases} A - A' = A \\ A' - A = A' \end{cases}$$

$$\begin{cases} A - \emptyset = A \\ \emptyset - A = \emptyset \end{cases}$$

$$\begin{cases} M - \emptyset = M \\ \emptyset - M = \emptyset \end{cases}$$

$$\begin{cases} M - A = A' \\ A - M = \emptyset \end{cases}$$

$$A - B = A \cap B'$$

مهم: تبدیل تفاضل به اشتراک:

$$A - B = \{x | x \in A, x \notin B\} = \{x | x \in A, x \in B'\} = A \cap B'$$

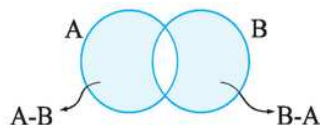
اثبات:

پرسش نمونه

اگر A و B دو مجموعه دلخواه باشند، ثابت کنید: $A - B' = B - A'$

راه حل: طرف دوم $A - B' = A \cap (B')' = A \cap B = B \cap A = B - A'$ طرف اول

تفاضل متقارن: اگر A و B دو مجموعه دلخواه باشند، $A \Delta B$ را «تفاضل متقارن» می‌نامیم که شامل اعضای است که فقط در



A باشند یا فقط در B باشند نه هر دو. بنابراین داریم: $A \Delta B = (A - B) \cup (B - A)$

با توجه به نمودار مقابل می‌توان چنین نیز نوشت: $A \Delta B = (A \cup B) - (A \cap B)$

$$A \Delta B = (A - B) \cup (B - A) = (A \cup B) - (A \cap B)$$

بنابراین:

فصل ۱

مجموعه‌ها

نکته

اگر A مجموعه‌ای دلخواه باشد و M مجموعه‌ی مرجع آن‌گاه:

$$M \Delta A = A'$$

$$A \Delta A = \emptyset$$

$$A \Delta \emptyset = A$$

$$A \Delta A' = M$$

پرسش نمونه

۱) اگر $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ و $B = \{4, 5, 6\}$ باشد، مجموعه $A \Delta B$ را تشکیل دهید.

راه حل: $A \Delta B = (A \cup B) - (A \cap B) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} - \{4, 5\} = \{1, 2, 3, 6\}$

۲) ثابت کنید $A \Delta A' = M$.

راه حل اول: $A \Delta A' = (A - A') \cup (A' - A) = A \cup A' = M$

راه حل دوم: $A \Delta A' = (A \cup A') - (A \cap A') = M - \emptyset = M$

عدد اصلی اشتراک و اجتماع دو مجموعه: تعداد اعضای یک مجموعه مثل A را با $n(A)$ نشان می‌دهیم و به آن عدد اصلی می‌گوییم، در این صورت، داریم:

۱) $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$

۲) $n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C)$

۳) $n(A - B) = n(A) - n(A \cap B)$

پرسش نمونه

در یک کلاس ۳۰ نفری، ۱۷ نفر به خوشنویسی علاقه دارند و ۱۵ نفر به نقاشی. ۲ نفر هم به هیچ‌کدام علاقه‌ای ندارند. چند نفر هم خوشنویسی دوست دارند هم نقاشی؟

راه حل: ابتدا ۲ نفر را کنار می‌گذاریم؛ یعنی اجتماع دو مجموعه دارای ۲۸ عضو است: $n(A \cup B) = 30 - 2 = 28$

سپس: $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$

$28 = 17 + 15 - n(A \cap B) \rightarrow n(A \cap B) = 17 + 15 - 28 = 4$

۴ نفر هم به خوشنویسی و هم به نقاشی علاقه دارند.

بسته بودن یک مجموعه نسبت به یک عمل

مجموعه‌ی A را نسبت به عملی مثل جمع، بسته می‌گوییم؛ هرگاه هر دو عضو دلخواه آن را جمع بزنیم، حاصل جمع باز هم در A باشد.

پرسش نمونه

۱) بسته بودن $\mathbb{N}$ نسبت به ۴ عمل اصلی را بررسی کنید.

راه حل: $\mathbb{N}$ نسبت به عمل جمع، بسته است؛ چون مجموع هر دو عدد طبیعی باز هم عددی طبیعی است.

نسبت به ضرب نیز بسته است؛ ولی $\mathbb{N}$ نسبت به تفریق بسته نیست؛ زیرا به عنوان مثال ۲ و ۵ اعداد طبیعی اند؛

ولی $5 - 2$ برابر با ۳ است که طبیعی نیست. پس نسبت به تفریق بسته نیست.

$\mathbb{N}$ نسبت به تقسیم نیز بسته نیست!

$\mathbb{Z}$ نسبت به جمع و تفریق و ضرب بسته است ولی نسبت به تقسیم بسته نیست!

۲ مجموعه‌ی $A = \{1, 0\}$ نسبت به کدام عمل اصلی بسته است؟

راه‌حل: A نسبت به جمع بسته نیست! چون $1 + 1 = 2 \notin A$ (یک عضو را می‌توان با خودش نیز جمع زد).

A نسبت به تفریق نیز بسته نیست! $0 - 1 = -1 \notin A$

A نسبت به تقسیم نیز بسته نیست! $1 \div 0 \notin A$

ولی A نسبت به ضرب بسته است! چون $1 \times 1, 1 \times 0, 0 \times 0$ در مجموعه‌ی A وجود دارد!

مجموعه تهی و مرجع، عضویت، تساوی دو مجموعه

(المپیاد ریاضی مشور ۹۶)

۱ کدام گزینه یک مجموعه را نشان می‌دهد؟

- (۱) دو عدد مرکب بین ۲۰ و ۲۵
(۲) دو عدد که در معادله $x + y = 4$ صدق می‌کند.
(۳) دو عدد که در معادله $x^2 + (y-1)^2 = 0$ صدق می‌کنند.
(۴) دو دانش‌آموز نهمی شهر مشهد که در المپیاد ریاضی شرکت کرده‌اند.

۲ کدام گزینه‌ی زیر مجموعه‌ی تهی را نشان می‌دهد؟

- (۱) اعداد صحیحی که نه مثبت باشند نه منفی.
(۲) اعداد طبیعی که نه اول باشند نه مرکب.
(۳) اعداد اولی که بر ۷ بخش پذیرند.
(۴) اعداد صحیح منفی بین ۱۹- و ۲۰-.

۳ اگر $A = \{\{\{1\}, \{1, 2\}\}\}$ و $B = \{\{1, 2\}, \{1\}\}$ آن‌گاه کدام گزینه زیر درست است؟

- (۱) $1 \in A$ (۲) $1 \in B$ (۳) $C \in A$ (۴) $B \in A$

۴ اگر $M = \{a, a+1, a-2, a+3\}$ و $5 \in M$ ولی $7 \notin M$ آن‌گاه a چند مقدار مختلف می‌تواند باشد؟ (نمونه دولتی تهران ۹۹)

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۵ مجموعه‌ی A «مجموعه سه عدد زوج متوالی است که مجموعشان ۶۶ است» کدام رابطه درست نیست؟

- (۱) $22 \in A$ (۲) $24 \notin A$ (۳) $26 \notin A$ (۴) $20 \in A$

۶ کدام مجموعه تعداد عضو بیشتری دارد؟

- (۱) $A = \{1', 1'', 1''', \dots, 1^{(n)}\}$
(۲) $B = \{-9, -8, \dots, 10\}$
(۳) $C = \{(-10)^2, (-9)^2, (-8)^2, \dots, 10^2\}$
(۴) $D = \{10, 100, 1000, 10000, 100000\}$

۷ اگر تعداد اعضای دو مجموعه $A = \{\{1, \{ \}, \{ \{ \} \}\}$ و $B = \{\emptyset, \{ \}, \{ \{ \} \}\}$ را با نماد $n(A)$ و $n(B)$ نشان دهیم، $n(A) - n(B)$ برابر با کدام گزینه است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) صفر

۸ آقای کاهه از بچه‌ها خواسته است مجموعه‌ای ۳ عضوی بسازند که از هر دو عضو آن یکی عضو دیگری باشد! پاسخ برخی

دانش‌آموزان را در ۴ گزینه آورده‌ایم. کدام درست گفته است؟

- (۱) علی: امکان ندارد.
(۲) بهزاد: $\{\{1\}, 1, \{2\}\}$
(۳) مهرداد: $\{\emptyset, \{ \}, \{\emptyset\}\}$
(۴) شایان: $\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}, \emptyset\}\}$

۹ اگر $A = \{\emptyset, \{\emptyset, \emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$ باشد، چه تعداد از عبارت‌های زیر صحیح است؟

- (۱) یک عبارت (۲) دو عبارت (۳) سه عبارت (۴) هیچ کدام
 $\{\emptyset\} \in A$ $\{\emptyset\} \notin A$ $(\emptyset) \in A$ $\{\emptyset\} \in A$ $\emptyset \in A$

(مدارس سلام ۹۶)

۱۰ اگر مجموعه‌ی $A = \{a-1, 7, 3\}$ و $B = \{-3, 3, b+2\}$ برابر باشند، ab کدام است؟

- (۱) -۳۰ (۲) -۱۰ (۳) ۱۰ (۴) ۳۰

(تیزهوشان ۹۳)

۱۱ به ازای چند مقدار از x دو مجموعه‌ی $A = \{1, x, x^2\}$ و $B = \{y, y^2\}$ می‌توانند برابر شوند؟

- (۱) ۱ (۲) صفر (۳) ۲ (۴) ۳

۱۲ اگر دو مجموعه‌ی $A = \{-1, \{2+x\}, y+x\}$ و $B = \{3, x-y, \{z\}\}$ مساوی باشند، حاصل $x^2 + 2y^2 + z^2$ چند است؟

- (۱) ۱۸ (۲) ۱۷ (۳) ۱۵ (۴) ۱۴

۱۳ اگر مجموعه‌ی $\{3x-3, 5-x\}$ مجموعه‌ای تک‌عضوی باشد، مقدار این عضو چقدر است؟

۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴)

۱۴ اگر $\{3y\} = \{2x+3, x-9\}$ مقدار y چند است؟

۲ (۱) -۷ (۲) -۴ (۳) ۳ (۴)

۱۵ می‌دانیم که $1 \in A$ است؛ همچنین هر عددی که در A باشد، هم دو برابر آن و هم دو واحد کمتر از آن، عضو A هستند، کدام

(تیزهوشان ۸۶)

گزینه ممکن است در A نباشد؟

۱۳۸۷ (۱) ۲۰۰۸ (۲) -۲۰۰۸ (۳) -۱۳۸۷ (۴)

۱۶ اگر $A_1 = \{1\}$ و $A_2 = \{2, 3\}$ و $A_3 = \{4, 5, 6\}$ و $A_4 = \{7, 8, 9, 10\}$ باشد، آن‌گاه مجموعه‌ی A_4 با چه عددی شروع

(انرژی اتمی ۷۹)

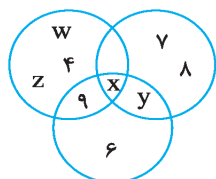
می‌شود؟

۴۵ (۱) ۴۶ (۲) ۵۵ (۳) ۵۶ (۴)

(تیزهوشان ۸۹)

۱۷ اگر $a \in A$ آن‌گاه $-a \in A$ در این صورت مجموعه A کدام یک از مجموعه‌های زیر نمی‌تواند باشد؟

$\mathbb{Z}$ (۱) $\mathbb{Q}$ (۲) $\mathbb{R}$ (۳) $\mathbb{N}$ (۴)



۱۸ عناصر ۱، ۲، ۳، ...، ۹ عضوهای سه مجموعه‌ی A و B و C هستند. به جز ۴ عضو w, x, y, z بقیه‌ی اعضا در شکل مقابل نشان داده شده‌اند. اگر مجموع اعضای هر سه مجموعه برابر باشند،

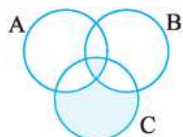
مقدار x کدام است؟

(تفکیک علامه طباطبائی)

۱ (۱) ۲۹ (۲) ۳ (۳) ۵ (۴)

(تیزهوشان)

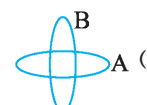
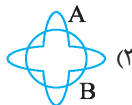
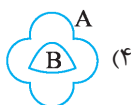
۱۹ اگر $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ ، $B = \{2, 7, 4\}$ ، $C = \{1, 2, 7, 8\}$ باشند، مجموع مقادیر در قسمت‌های رنگ‌شده کدام است؟



۱۰ (۱) ۱۱ (۲)

۱۷ (۳) ۱۲ (۴)

۲۰ کدام نمودار وضعیت متفاوتی را از A و B نشان می‌دهد؟



۲۱ بعضی «ولاک»‌ها «تابون» هستند. هیچ «تابونی»، «دکات» نیست. همه‌ی «کامتن»‌ها، «دکات» هستند. بعضی «کامتن»‌ها،

«ولاک» هستند. اگر هر ۴ جمله درست باشد، کدام نتیجه را می‌توان گرفت؟

(۱) همه‌ی «دکات»‌ها «تابون» هستند. (۲) همه‌ی «کامتن»‌ها «تابون» هستند.

(۳) هیچ «ولاک»ی، «دکات» نیست. (۴) بعضی «دکات»‌ها «ولاک» هستند.

۲۲ در شکل روبه‌رو M_1 مجموعه‌ی مضرب‌های عدد ۹ و M_{15} مجموعه‌ی مضرب‌های عدد ۱۵ و M_8 مجموعه‌ی مضرب‌های عدد

۸ می‌باشد. چه عددی را می‌توان به جای * قرار داد؟

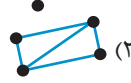
۷۲ (۱) ۳۶۰ (۲)

۱۲۰ (۳) ۴۶۰ (۴)

۲۳ ۵ مجموعه دو عضوی غیر مساوی داریم. در گزینه‌های زیر هر نقطه یکی از این مجموعه‌ها را نشان می‌دهد. اگر اشتراک دو مجموعه

تهی نباشد، نقاط مربوط به آن‌ها را به هم وصل کرده‌ایم. کدام یک از اشکال زیر نمی‌تواند مربوط به این ۵ مجموعه باشد؟

(تیزهوشان ۹۶)



زیرمجموعه، تعداد زیرمجموعه‌ها

۲۴ با توجه به مجموعه $A = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ کدام یک از عبارتهای زیر نادرست است؟ (سنجش علمی سمپاد ۹۸)

- (۱) $\{\{\emptyset\}\} \in A$ (۲) $\{\{\emptyset\}\} \subseteq A$ (۳) $\{\emptyset, \{\emptyset\}\} \in A$ (۴) $\{\emptyset, \{\emptyset\}\} \subseteq A$

۲۵ اگر $\{\text{تمام متوازی‌الاضلاع‌ها}\} = A$ باشد، زیرمجموعه‌ای از A که قطرهای عمود منصف یکدیگر باشند، کدام است؟

- (۱) مجموعه‌ی لوزی‌ها (۲) مجموعه‌ی مربع‌ها (۳) مجموعه‌ی مستطیل‌ها (۴) مجموعه‌ی دوزنقه‌ها

۲۶ مجموعه $A = \{\{\emptyset\}, \{\emptyset, \emptyset\}, \{\emptyset, \emptyset, \emptyset\}\}$ چند زیرمجموعه دارد؟ (تیزهوشان)

- (۱) ۸ (۲) ۴ (۳) ۲ (۴) ۱

۲۷ کدام نتیجه‌گیری درست نیست؟

- (۱) $A \subseteq B$ ، $B \subseteq C$ ، آن‌گاه $A \subseteq C$ (۲) $x \notin A$ ، $A \subseteq B$ ، آن‌گاه $x \notin B$
(۳) $B \subseteq A$ ، $A \subseteq B$ ، آن‌گاه $\{A\} = \{B\}$ (۴) $b \in A$ ، $A \subseteq B$ ، آن‌گاه $b \in B$

۲۸ تعداد زیرمجموعه‌های $B = \{\{\emptyset\}, \{\emptyset, \emptyset\}\}$ چند برابر تعداد زیرمجموعه‌های مجموعه‌ی $A = \{\{1, 2, 3, \dots, 10\}\}$ می‌باشد؟ (نمونه دولتی ۹۸)

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۲۹ در کدام گزینه، مجموعه داده‌شده ۱۶ زیرمجموعه دارد؟

- (۱) $A = \{\{1, 2, 3, 4\}\}$ (۲) $B = \{\{1, 2\}, \{1, 2, 3\}, \{2\}\}$
(۳) $C = \{2^2, 3^2, 4^2, 5^2\}$ (۴) $D = \{3, 3 - 2, 3 - 1, 2\}$

۳۰ چند زیرمجموعه سه عضوی از اعداد طبیعی وجود دارد که حاصل ضرب اعضای آن در هم برابر ۴۵ شود؟ (تیزهوشان ۹۵)

- (۱) یک (۲) دو (۳) سه (۴) چهار

۳۱ چند مجموعه به جای A می‌توان نوشت که در رابطه‌ی مقابل صدق کند؟ $\{1, 5\} \subseteq A \subseteq \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

- (۱) ۴ (۲) ۸ (۳) ۱۶ (۴) ۳۲

۳۲ اگر A یک مجموعه‌ی ۵ عضوی باشد و $\{1, 2, 3\} \subseteq A \subseteq \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 10\}$ برای A چند جواب مختلف می‌توان یافت؟

- (۱) ۱۰ (۲) ۱۵ (۳) ۱۲ (۴) ۸

۳۳ مجموعه‌ی $A = \{a, b, c, d, e, f\}$ چند زیرمجموعه دارد که شامل a و d باشد؛ ولی فاقد e باشند؟

- (۱) ۴ (۲) ۵ (۳) ۸ (۴) ۱۶

۳۴ دو مجموعه‌ی $A = \{a, b, c, d, e, f\}$ و $B = \{m, n, a, d, k, f\}$ مفروض‌اند. چند زیرمجموعه از A یافت می‌شود که زیرمجموعه‌ی B نیز باشد؟

- (۱) ۲ (۲) ۴ (۳) ۶ (۴) ۸

۳۵ اگر اعضای مجموعه‌ی $A = \{a, b, c, d\}$ را به اعضای مجموعه‌ی $B = \{a, f, g, d\}$ اضافه کنیم، به زیرمجموعه‌های B چه تعداد اضافه می‌شود؟

- (۱) ۴۸ (۲) ۳۲ (۳) ۱۶ (۴) ۸

۳۶ مجموعه‌ی A مجموعه‌ای ۱۰ عضوی است. این مجموعه چند زیرمجموعه دارد که هرکدام حداقل دو عضو داشته باشد؟

- (۱) ۹۶۸ (۲) ۱۰۱۳ (۳) ۱۰۲۳ (۴) ۹۷۸

۳۷ مجموعه‌ای n عضوی دارای n^2 زیرمجموعه است. این مجموعه چند عضوی است؟

- (۱) ۲ عضوی (۲) ۳ عضوی (۳) ۴ عضوی (۴) ۲ یا ۴ عضوی

۳۸ تعداد زیرمجموعه‌های ۶ عضوی یک مجموعه برابر است با تعداد زیرمجموعه‌های ۱۰ عضوی همان مجموعه. این مجموعه چند عضو دارد؟

۱۸ (۱) ۱۶ (۲) ۱۴ (۳) ۱۲ (۴)

۳۹ تعداد زیرمجموعه‌های ۳ عضوی یک مجموعه، ۲ برابر تعداد زیرمجموعه‌های ۲ عضوی آن است. این مجموعه چند زیرمجموعه ۵ عضوی دارد؟

۵۶ (۱) ۴۲ (۲) ۳۶ (۳) ۲۴ (۴)

۴۰ تعداد زیرمجموعه‌های یک مجموعه $(k + 3)$ عضوی از تعداد زیرمجموعه‌های یک مجموعه $(k - 1)$ عضوی، ۶۰ واحد بیشتر است. عدد طبیعی k ، برابر است با:

۵ (۱) ۴ (۲) ۳ (۳) ۲ (۴)

۴۱ اگر به تعداد اعضای یک مجموعه ۳ عضو اضافه شود، به تعداد زیرمجموعه‌هایش ۴۴۸ عضو اضافه می‌شود. این مجموعه چند عضو است؟

۵ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۶ (۴)

۴۲ مجموع تعداد اعضا و تعداد زیرمجموعه‌های یک مجموعه ۳۷ است. این مجموعه چند عضوی است؟

۲ (۱) ۳ (۲) ۴ (۳) ۵ (۴)

۴۳ تعداد زیرمجموعه‌های یک مجموعه $2n - 1$ عضوی برابر با ۳۲ است. این مجموعه چند عضو دارد؟

۲ (۱) ۳ (۲) ۵ (۳) ۳۲ (۴)

۴۴ تفاوت تعداد زیرمجموعه‌های یک مجموعه $k + 3$ عضوی، از ۱۰ برابر زیرمجموعه‌های یک مجموعه k عضوی ۶۴ است. این مجموعه k عضوی چند زیرمجموعه‌ی ۴ عضوی دارد؟

(انرژی اتمی ۸۵)

۴ (۱) ۵ (۲) ۱۰ (۳) ۷۰ (۴)

۴۵ اگر A مجموعه‌ی اعدادی باشد که معکوسشان با خودشان برابر باشد و B مجموعه‌ی اعدادی باشد که معکوسشان با ربعشان برابر باشد، در این صورت مجموعه‌ای شامل تمام اعضای A و B ، چند زیرمجموعه دارد؟

(المپیاد ریاضی ۸۱)

۱۶ (۱) ۳۲ (۲) ۸ (۳) ۴ (۴)

۴۶ تعداد زیرمجموعه‌های یک مجموعه‌ی m عضوی چند برابر تعداد زیرمجموعه‌های یک مجموعه‌ی $(m - k)$ عضوی است؟

(تیزهوشان - المپیاد)

m^k (۱) k^m (۲) 2^{m+k} (۳) 2^k (۴)

۴۷ اگر A دارای n عضو باشد، مجموعه‌ی زیرمجموعه‌های آن چند زیرمجموعه دارد؟

(تیزهوشان)

2^{n^2} (۱) n^2 (۲) 2^{2^n} (۳) $2n$ (۴)

۴۸ چند مجموعه‌ی متفاوت از اعداد طبیعی کمتر از ۲۵ می‌توان نوشت که هر کدام فقط شامل مضرب‌های عدد ۵ باشد؟

۱۵ (۱) ۱۶ (۲) ۳۱ (۳) ۳۲ (۴)

۴۹ مجموعه‌ای ۱۰ عضو دارد. تعداد زیرمجموعه‌هایی که تعداد اعضایشان فرد است با n و تعداد زیرمجموعه‌هایی که تعداد اعضایشان زوج است را با m نشان می‌دهیم. کدام رابطه درست است؟

$m = n$ (۱) $2^m = 10 + 2^n$ (۲) $2^m - 2^n = 1$ (۳) $m = n + 10$ (۴)

۵۰ مجموعه‌ی $A = \{1, 10, 100, 1000\}$ را در نظر بگیرید. همه‌ی زیرمجموعه‌های غیر تهی آن را می‌نویسیم. میانگین کوچک‌ترین

اعضای این زیرمجموعه‌ها چقدر است؟

- (۱) $83/2$ (۲) $1111/4$ (۳) $1111/16$ (۴) $1208/15$

۵۱ مجموعه‌ی $A = \{1, 2, 3, \dots, 100\}$ چند زیرمجموعه دارد که هر یک حداقل دارای یک عدد زوج باشد؟

- (۱) 2^{50} (۲) $2^{100} - 2^{50}$ (۳) 2^{51} (۴) $2^{50} + 2^{51}$

۵۲ از ۱۰۰ دانش‌آموز پایه‌ی نهم یک مدرسه، مجموعه‌ی A ، شامل ۴۰ دانش‌آموز، مجموعه‌ی B شامل ۶۰ دانش‌آموز و مجموعه‌ی

C شامل ۷۰ دانش‌آموز را در نظر می‌گیریم. می‌دانیم $A \subseteq B$ ولی $B \not\subseteq C$. چه تعداد از جملات زیر حتماً درست‌اند؟

(انرژی اتمی-۹۰)

الف) A و C اعضای مشترک دارند. ب) A زیرمجموعه‌ی C نیست.

ج) مجموعه‌ی B حداقل ۱۰ عضو دارد که عضو مجموعه‌ی C نیستند.

- (۱) یک (۲) دو (۳) سه (۴) هیچ‌کدام

۵۳ مجموعه‌ی $\{1, 2, 3, \dots, 9\}$ چند زیرمجموعه‌ی سه عضوی دارد که جمع عضوهای آن برابر با ۱۵ باشد و عدد ۴ عضو آن

(تیزهوشان ۸۹)

باشد؟

- (۱) ۴ (۲) ۳ (۳) ۲ (۴) چنین مجموعه‌ای وجود ندارد.

۵۴ مجموعه‌ی A مجموعه‌ای ۶ عضوی است که جمع اعضایش ۴۰ است. همه‌ی زیرمجموعه‌های غیر تهی A را می‌نویسیم و حاصل جمع

(تیزهوشان)

اعضای هر کدام را روی تخته سیاه یادداشت می‌کنیم. جمع اعداد یادداشت شده چقدر است؟

- (۱) ۱۱۰۰ (۲) ۱۲۸۰ (۳) ۲۵۶۰ (۴) ۳۱۰۰

(المپیاد ریاضی با تغییر)

۵۵ کدام یک از روابط زیر درست است؟

(۱) $A \not\subseteq B$ و $A \not\subseteq C$ ، آن‌گاه $A \not\subseteq C$ (۲) اگر $A \subseteq B$ و $B \subseteq C$ ، آن‌گاه $A \subseteq C$

(۳) اگر $A \subseteq B$ و $B \in C$ ، آن‌گاه $A \in C$ (۴) اگر $A \subseteq B$ و $C \subseteq B$ ، آن‌گاه $A \subseteq C$

۵۶ اگر مجموعه‌ی $A = \{-1, -2, -8, 2x, y+1, z\}$ دارای ۸ زیرمجموعه باشد، آن‌گاه حداقل مقدار $x+y+z$ کدام است؟

(آزمون ستایش ۹۰)

- (۱) ۱۰ (۲) -۲۱ (۳) -۱۰ (۴) -۱۱

(المپیاد بلژیک)

۵۷ هرگاه دوجمله‌ی زیر درست باشد، کدام نتیجه‌گیری نمی‌تواند درست باشد؟

«بعضی از x ها، y نیستند»؛ «هیچ‌یک از z ها، y نیستند».

(۱) بعضی از x ها، z نیستند. (۲) بعضی از x ها، z هستند.

(۳) بعضی از y ها، z هستند. (۴) هیچ z نیست که x باشد.

۵۸ چند زیرمجموعه‌ی ۶ عضوی از مجموعه‌ی $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$ وجود دارد که دارای ۴ عدد زوج و ۲

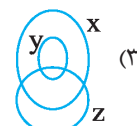
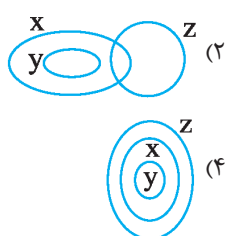
(روبوکاپ ۸۸)

عدد فرد است؟

- (۱) ۱۵ (۲) ۳۰ (۳) ۱۲۰ (۴) ۲۲۵

۵۹ مجموعه مقسوم‌علیه‌های ۳۶ را با x مجموعه مقسوم‌علیه‌های ۱۸ را با y و مجموعه مقسوم‌علیه‌های ۳۹ را با z نشان می‌دهیم. کدام

گزینه این سه مجموعه را درست نشان می‌دهد؟



۶۰ کدام گزینه درست است؟

$$(۱) x \in \{ \{x, y\}, \{x, \{x\}\} \}$$

$$(۲) x \in \{ \{x\} \}$$

$$(۳) \{x\} \subseteq \{x, \{x\}\}$$

$$(۴) \{x\} \subseteq \{ \{x\}, \{a, x\} \}$$

۶۱ اگر $A \subseteq B$ باشد، کدام مورد همواره درست خواهد بود؟

$$(۴) B' \subseteq A'$$

$$(۳) A' \subseteq B'$$

$$(۲) A' \subseteq B$$

$$(۱) A \subseteq B'$$

۶۲ کدام درست نیست؟ (A دلخواه و M مرجع است)

$$(۴) \emptyset \subseteq M'$$

$$(۳) M' \subseteq A'$$

$$(۲) \emptyset \subseteq A \subseteq M$$

$$(۱) \emptyset' \subseteq A$$

۶۳ اگر $A \subseteq B$ و $A' \subseteq B$ باشد، کدام گزینه نتیجه می‌شود؟

$$(۴) A = M$$

$$(۳) B = M$$

$$(۲) B = \emptyset$$

$$(۱) A = \emptyset$$



مجموعه‌های عددی؛ زبان ریاضی

۶۴ مجموعه‌ی $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ چند زیرمجموعه دارد که زیرمجموعه‌ی هیچ کدام از مجموعه‌های $\{1, 2, 3, 4\}$ و $\{3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ نباشد؟

(انرژی اتمی ۹۷)

$$(۴) ۵۶$$

$$(۳) ۸۴$$

$$(۲) ۸۰$$

$$(۱) ۵۲$$

۶۵ اگر A یک مجموعه باشد، به زیرمجموعه‌هایی از A که بین هر دوتای آن‌ها رابطه‌ی زیرمجموعه بودن برقرار باشد یک «زنجیر» می‌نامیم. با توجه به این تعریف به پرسش‌های ۶۵ و ۶۶ پاسخ دهید:

فرض کنید $x = \{a, b, c, d, e, f\}$ ، دو زیرمجموعه $\{a\}$ و $\{a, e\}$ از مجموعه x را در نظر بگیرید. این دو زیرمجموعه به همراه کدام گزینه، یک «زنجیر» تشکیل می‌دهند؟

(سنش علمی تیزهوشان تبریز ۹۸)

$$(۱) \{a, b, e, f\}, \{a, b, c\}, \{a, b, c, e, f\}, \{a, b, c, d, e, f\}$$

$$(۳) \{a, b, e\}, \{a, b, c, e, f\}, \{a, b, c, e\}, \{a, b, d, e, f\}$$

$$(۴) \{a, e, f\}, \{a, b, c, d, e, f\}, \{a, b, c, e, f\}, \{a, c, e, f\}$$

۶۶ فرض کنید $M = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ دو زیرمجموعه $\{1\}$ و $\{1, 3, 5, 7\}$ از مجموعه M را در نظر بگیرید. حداکثر چند زیرمجموعه دیگر از M به همراه این دو زیرمجموعه تشکیل یک زنجیر می‌دهند؟

(سنش علمی تیزهوشان تبریز ۹۸)

$$(۲) ۵$$

$$(۱) ۴$$

$$(۴) ۷$$

$$(۳) ۶$$

(نمونه دولتی تهران ۹۹)

۶۷ اگر $B = \{2^{101} + 2^n \mid n \in \mathbb{N}, n \leq 2^{100}\}$ باشد، مقدار $n(B)$ کدام است؟

$$(۴) 2^{101} + 2^{100}$$

$$(۳) 2^{100}$$

$$(۲) 2^{102} + 2^{101}$$

$$(۱) 2^{101}$$

(تیزهوشان ۷۸)

۶۸ اگر $x \in \mathbb{Z}$ باشد، آن‌گاه کدام یک از گزاره‌های زیر صحیح است؟

$$(۲) \sqrt{x^2 + 1} \in \mathbb{Z} \text{ برای برخی } x \text{ ها.}$$

$$(۱) \sqrt{x^2 + 1} \in \mathbb{Z} \text{ برای همه } x \text{ ها.}$$

$$(۴) \sqrt{x^2 + 1} \in \mathbb{N} \text{ برای همه } x \text{ ها.}$$

$$(۳) \sqrt{x^2 + 1} \in \mathbb{Q} \text{ برای هیچ مقدار.}$$

۶۹ اگر اعضای مجموعه‌ی A اعداد زوج بین ۳- و ۱۵ باشند و داشته باشیم $B = \{x \mid -x \in A\}$ کدام گزینه نادرست است؟

(سنش مدراس تیزهوشان ۹۱)

$$(۲) -2 \in B$$

$$(۱) 2 \in B$$

$$(۴) -4 \in B$$

$$(۳) 4 \in B$$

(تیزهوشان ۸۱)

۷۰ مجموعه‌ی $A = \{0, 1, 3, 7, \dots\}$ را با زبان ریاضی می‌نویسیم. کدام گزینه درست است؟

- (۱) $A = \{2^x - 1 \mid x \in \mathbb{N}\}$ (۲) $A = \{2^x - 1 \mid x \in \mathbb{W}\}$
(۳) $A = \{2^x - 1 \mid x \in \mathbb{Z}\}$ (۴) $A = \{2^x - 1 \mid x \in \mathbb{R}\}$

(آزمون مدارس تیزهوشان ۹۱)

۷۱ مجموعه‌ی $A = \{\frac{x}{y} \mid x, y \in \mathbb{N}, x + y \leq 4\}$ چند عضو دارد؟

- (۱) ۴ (۲) ۵ (۳) ۶ (۴) ۷

(نمونه دولتی ۹۸)

۷۲ اگر $A = \{1, 2, 3, \dots, 30\}$ و $B = \{x \mid x = 4n - 1, n \in A\}$ و $B \leq A$ ، آن‌گاه B چند عضو دارد؟

- (۱) ۶ (۲) ۲۹ (۳) ۷ (۴) ۳۰

(تیزهوشان ۸۹ با اصلاح)

۷۳ مجموعه‌ی $A = \{x \mid \frac{20}{x} \in \mathbb{Z}, x \in \mathbb{Z}\}$ دارای چند زیرمجموعه‌ی ۱۵ عضوی است؟

- (۱) 2^{14} (۲) 2^{15} (۳) ۱۵ (۴) ۱۶

(سنجش مدارس تیزهوشان ۹۳)

۷۴ مجموعه‌ی $A = \{x \mid x \in \mathbb{Z}, x = x^2\}$ چند زیرمجموعه دارد؟

- (۱) ۲ (۲) ۸ (۳) ۲۷ (۴) ۴۲

۷۵ اگر $A = \{-x^2 + 1 \mid x \in \mathbb{Z}, -2 \leq x < 3\}$ ، $B = \{-x^2 \mid x \in A\}$ باشد، کدام گزینه عضوهای مجموعه B را نشان می‌دهد؟

(تیزهوشان ۹۲ لکلیلوپه)

- (۱) $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$ (۲) $\{-3, 1, 0\}$ (۳) $\{-1, 0, 2, 7\}$ (۴) $\{-8, -1, 0, 1, 8\}$

(تیزهوشان ۹۲ هرمزگان)

۷۶ مجموعه‌ی $A = \{\frac{12x}{x^2} \mid x \in \mathbb{N}, -7 \leq \sqrt{x} \leq 4\}$ چند عضو دارد که عدد صحیح نیست؟

- (۱) ۱۲ (۲) ۱۰ (۳) ۱۶ (۴) ۶

۷۷ فرض کنید K یک عدد ثابت است و $A = \{x^2 + K \mid x \in \mathbb{Z}, -3 \leq x < K\}$. اگر بدانیم $\{6, 9\} \subseteq A$ ، آن‌گاه K عضو کدام

(تیزهوشان ۹۵)

مجموعه است؟

- (۱) $\{5x + 1 \mid x \in \mathbb{Z}\}$ (۲) $\{4x + 3 \mid x \in \mathbb{Z}\}$
(۳) $\{2x + 6 \mid x \in \mathbb{Z}\}$ (۴) $\{3x - 4 \mid x \in \mathbb{Z}\}$

۷۸ برای دو مجموعه غیر تهی A و B داریم: $A \times B = \{[\frac{x}{y}] \mid x \in A, y \in B\}$ اگر $A = \{x \in \mathbb{N} \mid 5 < x^2 < 40\}$ و

(سنجش مدارس تیزهوشان ۹۸)

$B = \{3K - 2 \mid K \in \mathbb{Z}, 1 \leq K \leq 3\}$ باشند، آن‌گاه $N(A \times B)$ کدام است؟

- (۱) ۱۱ (۲) ۱۲ (۳) ۲۳ (۴) ۲۴

۷۹ مجموعه‌ی $A = \{-2, 4, -8, 16, \dots\}$ را به کدام صورت زیر می‌توان نشان داد؟

- (۱) $\{-x^2 \mid x \in \mathbb{N}\}$ (۲) $\{-2^x \mid x \in \mathbb{N}\}$
(۳) $\{(-2)^x \mid x \in \mathbb{N}\}$ (۴) $\{(-1)^{2x} \times 2^x \mid x \in \mathbb{N}\}$

(مسابقات علمی)

۸۰ کدام گزینه اعضای مجموعه A را مشخص می‌کند؟ $A = \{x \mid x = (-1)^n \times (n^2 - 2n + 1)^2, n \in \mathbb{N}\}$

- (۱) $\{0, 1, 4, \dots\}$ (۲) $\{0, 1, -16, \dots\}$ (۳) $\{1, 4, \dots\}$ (۴) $\{1, -16, \dots\}$

(تیزهوشان ۹۳ آذربایجان غربی)

۸۱ کوچک‌ترین عضو مجموعه‌ی $\{x^{2y} \mid x, y \in \mathbb{N}, x - y = 7\}$ کدام است؟

- (۱) $\emptyset$ (۲) ۱ (۳) ۸ (۴) ۶۴

(المپیاد ریاضی)

۸۲ بزرگ‌ترین عضو $\{-(x-1)^2 + 1 \mid x \in \mathbb{N}\}$ کدام است؟

- ۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) نامشخص

(تیزهوشان ۹۲)

۸۳ بزرگ‌ترین عضو مجموعه‌ی $A = \{3x - 5 \mid x \in \mathbb{Z}, 2 < \sqrt{11}\}$ چه عددی است؟

- ۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۵ (۴)

(علامه طباطبائی ۸۳)

۸۴ مجموعه‌ی $A = \{2^n - n^2 \mid n \in \mathbb{N}, n < 8\}$ دارای چند عضو اول است؟

- ۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۵ (۴)

(انرژی اتمی ۸۸)

۸۵ اعضای مجموعه‌ی A کدام است؟ $A = \{3x^{-y} - 2(-y)^{-x} \mid x, y \in \mathbb{Z}, xy = -2\}$

- ۱ (۱) $\{2, 4, 7, -\frac{7}{2}\}$ ۲ (۲) $\{7, -1, 4, -\frac{7}{2}\}$ ۳ (۳) $\{-1, -7, 2\}$ ۴ (۴) $\{\frac{3}{2}, 1, -2, 7\}$

(انرژی اتمی ۸۹)

۸۶ مجموعه‌ی $A = \{x^y \mid x, y \in \mathbb{Z}, xy = 8\}$ چند عضو دارد؟

- ۱ (۱) ۵ (۲) ۶ (۳) ۷ (۴) ۸ (۴)

(انرژی اتمی ۸۵)

۸۷ مجموعه‌ی $A = \{\frac{\Delta x}{3} \mid \frac{\Delta x}{3} \in \mathbb{N}, \Delta x \in \mathbb{Z}, -10 \leq x \leq 10\}$ چند عضو دارد؟

- ۱ (۱) ۱۰ (۲) ۲۱ (۳) ۳ (۴) ۴ (۴)

(نمونه دولتی ۹۶)

۸۸ چه تعداد از مجموعه‌های زیر دارای کوچک‌ترین عضو هستند؟

$$A = \{x \mid x \in \mathbb{N}, x < 5\} \quad B = \{x \mid x \in \mathbb{N}, x < 0\}$$

$$C = \{x \mid x \in \mathbb{Z}, -8 < x < 0\} \quad D = \{x \mid -x \in C\}$$

- ۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴)

۸۹ تعداد اعضای کدام مجموعه کمتر است؟

$$A = \{\Delta n - 12 \mid n \in \mathbb{N}, n < 5\} \quad B = \{\frac{x}{y} \mid x, y \in \mathbb{N}, x < y < 5\}$$

$$C = \{m \mid \frac{m}{2} \in \mathbb{Z}, m < 5\} \quad D = \{x \mid \sqrt{x} \in \mathbb{N}, x < 10\}$$

(پرتکرار، تیزهوشان ۹۲ - علامه طباطبائی - نمونه دولتی)

۹۰ مجموعه‌ی $A = \{\frac{3^{x+1}}{9^y} \mid 4y - x = 2\}$ کدام یک از مجموعه‌های زیر است؟

- ۱ (۱) $\{27\}$ ۲ (۲) $\{\frac{1}{3}\}$ ۳ (۳) $\{9\}$ ۴ (۴) $\{-3\}$

۹۱ کدام مجموعه‌ی زیر «نامتناهی» است؟

$$\{x \mid x \in \mathbb{N}, -x > -100\} \quad \{x \mid x \in \mathbb{Z}, x^2 < 10^{1000}\}$$

$$\{x \mid x \in \mathbb{W}, x + 1 > -1000\} \quad \{x \mid x \in \mathbb{W}, x + 1 > -1000\}$$

۹۲ مجموعه‌ی $\{7, 77, 777, \dots\}$ به زبان ریاضی کدام است؟

$$\{ \frac{1}{7}(10^n - 1) \mid n \in \mathbb{N} \} \quad \{ 7(10^n - 1) \mid n \in \mathbb{N} \} \quad \{ 7(\frac{10^n - 1}{9}) \mid n \in \mathbb{N} \} \quad \{ \frac{10^n - 1}{7} \mid n \in \mathbb{N} \}$$

۹۳ با توجه به مجموعه‌ی I ، مجموعه‌ی A کدام است؟

$$I = \{-10, -9, -8, \dots, 0, \dots, 8, 9, 10\} \quad A = \{x \mid x \in I, \frac{x}{3} \in \mathbb{Z}, \sqrt{x^2 + (x+2)^2} \in \mathbb{N}\}$$

- ۱ (۱) $\{-6, -3, 0, 3, 6\}$ ۲ (۲) $\{0, 6\}$ ۳ (۳) $\{-9, -6, -3, 0, 3, 6, 9\}$ ۴ (۴) $\{-3, 6\}$

(سلام ۹۲)

۹۴ حاصل جمع تمام اعضای مجموعه $A = \{x | x \in \mathbb{Z}, 1 < (x-2)^2 < 25\}$ کدام است؟

- ۱۰ (۱) ۱۲ (۲) ۱۵ (۳) ۱۹ (۴)

(المپیاد ریاضی)

۹۵ مجموعه $B = \left\{ \frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{Z}, a = 3b, b \neq 0 \right\}$ کدام گزینه است؟

- (۱) $\{\dots, -6, -3, \dots\}$ (۲) $\{\dots, -2, 2, \dots\}$
(۳) $\{3\}$ (۴) اطلاعات کافی نیست.

(لیگ علمی بابا)

۹۶ مجموعه $j = \left\{ \frac{3x+y}{3x-y} \mid x, y \in \mathbb{N}, xy = 6 \right\}$ چند عضو دارد؟

- (۱) ۴ عضو (۲) ۲ عضو (۳) ۳ عضو (۴) بی‌نهایت

۹۷ کدام گزینه مجموعه $B = \left\{ \frac{1}{4}, \frac{2}{9}, \frac{3}{16}, \dots \right\}$ را نشان می‌دهد؟

- (۱) $\left\{ \frac{x+1}{x+4} \mid x \in \mathbb{W} \right\}$ (۲) $\left\{ \frac{x}{y} \mid x, y \in \mathbb{N} \right\}$
(۳) $\left\{ \frac{x-1}{x^2} \mid x \in \mathbb{N}, x \geq 2 \right\}$ (۴) $\left\{ \frac{x}{x^2} \mid x \in \mathbb{N}, x^2 < 4 \right\}$

۹۸ اگر E مجموعه اعداد طبیعی زوج باشد و O مجموعه اعداد طبیعی فرد، بزرگ‌ترین عضو مجموعه A کدام است؟

(انرژی اتمی ۹۰)

$$A = \{(x-1)(y-1) \mid x \in E, y \in O, x+y \leq 20\}$$

- ۷۰ (۱) ۷۲ (۲) ۸۰ (۳) ۸۱ (۴)

(تیزهوشان ۹۵)

۹۹ مجموعه $\left\{ \frac{a}{b} \mid \frac{a}{b} < 1, b < 13, a, b \in \mathbb{N} \right\}$ چند عضو دارد؟

- (۱) ۴۹ عضو (۲) ۴۵ عضو (۳) ۷۸ عضو (۴) ۵۵ عضو

۱۰۰ اگر $A = \{6K+1 \mid K \in \mathbb{Z}, 1 \leq K \leq 1000\}$ و $B = \{7K+5 \mid K \in \mathbb{Z}, 1 \leq K \leq 800\}$ آن‌گاه $A \cap B$ برابر است با:

(المپیاد ریاضی مشهد ۹۶)

- (۱) $\{42K+13 \mid K \in \mathbb{Z}, 1 \leq K \leq 800\}$ (۲) $\{42K+19 \mid K \in \mathbb{Z}, 1 \leq K \leq 800\}$
(۳) $\{42K+13 \mid K \in \mathbb{Z}, 0 \leq K \leq 133\}$ (۴) $\{42K+19 \mid K \in \mathbb{Z}, 0 \leq K \leq 133\}$

(نمونه دولتی تهران ۹۹)

۱۰۱ نمایش ریاضی مجموعه $A = \{3, -6, 9, -12, \dots\}$ کدام است؟

- (۱) $\{(-1)^{n+1} \times 3(n+1) \mid n \in \mathbb{W}\}$ (۲) $\{(-1)^{n+1} \times 3n \mid n \in \mathbb{N}\}$
(۳) $\{(-3n)^{n+1} \mid n \in \mathbb{W}\}$ (۴) $\{3(-n)^{n+1} \mid n \in \mathbb{N}\}$

۱۰۲ اگر $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ و $B = \{x^2 \mid x \in A\}$ و $C = \{\sqrt{x^2} \mid x \in A\}$ آن‌گاه کدام یک از گزینه‌های زیر درست است؟

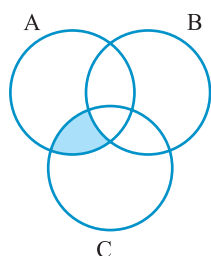
(نمونه دولتی خراسان رضوی ۹۹)

- $A = C$ (۱) $B \subseteq C$ (۲) $B \cup C = A$ (۳) $n(B \cap C) = 2$ (۴)



اشتراک، اجتماع، تفاضل

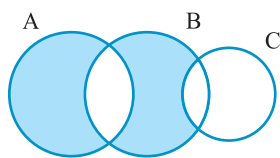
(نمونه دولتی ۹۶ اصفهان)



۱۰۳ کدام گزینه نشان‌دهنده قسمت سایه‌خورده است؟

- (۱) $(A \cap C) - B$
(۲) $(A \cup C) - B$
(۳) $B - (A \cap C)$
(۴) $C - (A \cap B)$

(سنجش مدرّس تیزهوشان ۹۸)



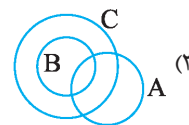
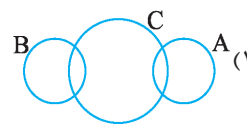
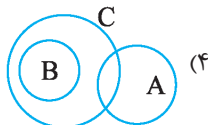
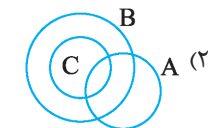
۱۰۴ با توجه به نمودار ون روبه‌رو، کدام گزینه مربوط به قسمت رنگی است؟

(۲) $(B - C) \cup A$

(۱) $(B - C) \cup (B - A)$

(۴) $(A \cup B) - (A \cap C)$

(۳) $[(A \cup B) - (A \cap B)] - C$

۱۰۵ اگر $A \cap B = \emptyset$ و $A \cap C = B$ و $C \cap B = B$ ، کدام نمودار برای این مجموعه مناسب‌تر است؟۱۰۶ عدد ۸ عضو مجموعه‌ی $(A - B) \cap C$ است. عدد ۸ عضو کدام یک از مجموعه‌های زیر است؟

(۴) $(A \cap C) - B$

(۳) $A - (C - B)$

(۲) $(A \cup B) - C$

(۱) $A - (B \cup C)$

(تیزهوشان ۸۰)

۱۰۷ اگر $A \subset B$ باشد، در این صورت حاصل $A \cup (B \cap A')$ برابر است با:

(۴) M

(۳) A'

(۲) B

(۱) A

(تیزهوشان ۸۳)

۱۰۸ اگر A و B دو مجموعه‌ی جدا از هم باشند، حاصل $A \cap B'$ کدام است؟

(۴) A

(۳) B'

(۲) $\emptyset$

(۱) M

(روبوکاپ ۸۶)

۱۰۹ اگر $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid \sqrt{x} \leq 4, \sqrt{x} \in \mathbb{N}\}$ و $B = \{2x \mid x \in \mathbb{Z}\}$ آن‌گاه $A \cap B$ چند عضو دارد؟

(۴) ۱

(۳) ۲

(۲) ۳

(۱) ۴

۱۱۰ اگر $A = \{x \mid x \neq \frac{1}{5}\}$ و $B = \{x \mid x = \frac{1}{5}\}$ ، مجموعه‌ی $A \cap B$ کدام است؟

(۴) $\{x \mid x \neq \frac{1}{5}\}$

(۳) $\{x \mid x = \frac{1}{5}\}$

(۲) $\{x \mid x = \frac{1}{5}\}$

(۱) $\{x \mid x \neq \frac{1}{5}\}$

۱۱۱ اگر $A_1 = \{1, 2, 3, \dots, 10\}$ و $A_2 = \{2, 3, 4, \dots, 11\}$ و $A_3 = \{3, 4, 5, \dots, 12\}$ و آن‌گاه $A = A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \dots$ چندعضوی

(دبیرستان البرز)

است؟

(۴) ۶

(۳) ۵

(۲) ۴

(۱) ۳

(نمونه دولتی ۹۵)

۱۱۲ اگر $A \cap B = A$ و $C \subseteq A$ باشد، حاصل عبرت روبه‌رو کدام است؟

$(A - B) \cup (C \cup B) = ?$

(۲) C

(۱) B

(۴) $C \cup A$

(۳) $\{ \}$

(نمونه دولتی تهران ۹۸)

۱۱۳ اگر $A \subseteq B$ باشد، حاصل $[(A - B)] \cup (B - A) \cup (A \cap B)$ کدام است؟

(۴) $\emptyset$

(۳) $B - A$

(۲) B

(۱) A

(المپیاد ریاضی فراسان رضوی ۹۸)

۱۱۴ در مورد مجموعه‌های A, B, C چند تا از عبارات زیر درست است؟* اگر $A \cup B = A \cup C$ باشد، حتماً $B = C$ است.* اگر $B \in A$ و $C \in B$ باشد، حتماً $C \in A$ است.* اگر $A \cap B = A \cap C$ باشد، حتماً $B = C$ است.

(۴) سه

(۳) دو

(۲) یک

(۱) صفر

(نمونه دولتی اصفهان ۹۹)

۱۱۵ کدام گزینه صحیح است؟

- (۱) در مجموعه $A = \{0, \emptyset\}$ نیز زیرمجموعه A هست.
 (۲) اگر A و B در مجموعه باشند که $n(A) = n(B)$ آن گاه $A = B$ خواهد بود.
 (۳) اگر $A \cap B = \emptyset$ باشد آن گاه $A - B = B - A$.
 (۴) اگر $C \subseteq B \subseteq A$ باشد حاصل $(B \cap C) - (A \cap B)$ برابر مجموعه تهی است.

(نمونه دولتی سمنان ۹۹)

۱۱۶ اگر A, B مجموعه غیر تهی باشند و $A \subseteq B$ کدام گزینه همواره درست است؟

- (۱) $(A - B) \cap A = A$
 (۲) $(A - B) \cup (B \cup A) = \emptyset$
 (۳) $(A \cap B) \cup (A - B) = A$
 (۴) $A \cup (B - A) = \emptyset$

۱۱۷ اشتراک همه‌ی زیرمجموعه‌های سه عضوی مجموعه‌ی $A = \{a, b, c, d, e\}$ کدام گزینه است؟

- (۱) A (۲) $\emptyset$ (۳) $\{a\}$ (۴) $\{a, b, c, d\}$

۱۱۸ A و B به ترتیب ۱۱ و ۷ عضوی هستند. مجموعه $A \cap B$ و $A - B$ حداقل و حداکثر چند عضوی است؟ (تالیفی ۹۵ - مدارس فرهنگ ۹۷)

- (۱) $A \cap B$: حداقل ۴ حداکثر ۷، $A - B$: حداقل صفر حداکثر ۱۱
 (۲) $A \cap B$: حداقل صفر حداکثر ۱۱، $A - B$: حداقل ۴ حداکثر ۷
 (۳) $A \cap B$: حداقل ۴ حداکثر ۱۱، $A - B$: حداقل صفر حداکثر ۷
 (۴) $A \cap B$: حداقل صفر حداکثر ۷، $A - B$: حداقل ۴ حداکثر ۱۱

۱۱۹ اگر $A = \{6k - 1 | k \in \mathbb{N}\}$ و $B = \{3k + 2 | k \in \mathbb{N}, k > 1\}$ حاصل $A \cap B$ کدام گزینه‌ی زیر است؟

- (۱) $\{6k - 1 | k \in \mathbb{N}\}$ (۲) $\{6k + 1 | k \in \mathbb{N}\}$ (۳) $\{6k + 2 | k \in \mathbb{N}, k > 2\}$ (۴) $\{6k - 1 | k \in \mathbb{N}, k \geq 2\}$

۱۲۰ اگر مجموعه‌ی مرجع را $\mathbb{Z}$ فرض کنیم و $A = \{2k + 1 | k \in \mathbb{Z}\}$ و $B = \{3k + 1 | k \in \mathbb{Z}\}$ و $C = \{3k + 2 | k \in \mathbb{Z}\}$ باشد،

مجموعه‌ی $A' \cap B' \cap C'$ برابر است با:

- (۱) $\{6k | k \in \mathbb{Z}\}$ (۲) $\{6k + 1 | k \in \mathbb{Z}\}$
 (۳) $\{6k - 1 | k \in \mathbb{Z}\}$ (۴) $\{3k | k \in \mathbb{Z}\}$

۱۲۱ مجموعه‌ی اعداد طبیعی، حسابی، صحیح، گویا و حقیقی را به ترتیب با N و W و Z و Q و R نشان می‌دهیم. کدام جمله

درست است؟ (سراسری ۸۳ و نمونه دولتی ۹۹)

- (۱) $Z \cup Q = R$ (۲) $W \cap N = Q$ (۳) $W \cap Q = N$ (۴) $W \subseteq Q$

۱۲۲ مجموعه‌ی $A \cup B$ دارای ۵ عضو، $A \cap B$ دارای ۲ عضو و $A - B$ نیز دارای ۲ عضو می‌باشد. مجموعه‌ی $B - A$ چند عضو

دارد؟ (سراسری ۸۲ - نمونه دولتی ۹۹)

- (۱) ۴ (۲) ۳ (۳) ۲ (۴) ۱

۱۲۳ اگر $A = \{\text{مقسوم‌علیه‌های عدد } 60\}$ و $B = \{\text{مقسوم‌علیه‌های } 48\}$ و $C = \{\text{مقسوم‌علیه‌های } 36\}$ در این صورت کدام گزینه

درست است؟

- (۱) $C \subset A$ (۲) $B \subset A$ (۳) $(B \cup C) \subset A$ (۴) $(B \cap C) \subset A$

۱۲۴ سه مجموعه‌ی A و B و C به ترتیب دارای ۲، ۳، ۴ عضو هستند و هر دو تایشان حداقل یک عضو مشترک دارند. $A \cup B \cup C$

(آزمایش علامه ملی)

حداقل و حداکثر چند عضو دارد؟

- (۱) ۴ و ۷ (۲) ۲ و ۴ (۳) ۲ و ۹ (۴) ۳ و ۹

۱۲۵ اگر به ازای دو مجموعه‌ی A و B داشته باشیم: $(A \subset B) \subset (A \cap B')$ ، آن گاه همواره...

- (۱) $A = B'$ (۲) $A = \emptyset$ (۳) $B = \emptyset$ (۴) $N = B$

۱۲۶ اجتماع دو مجموعه $\{a\}$ و $\{\{\emptyset\}, \{a\}\}$ و $\{a, \emptyset\}$ چند عضو دارد؟

- ۲ (۱) ۳ (۲) ۴ (۳) ۵ (۴)

۱۲۷ اجتماع دو مجموعه A و B ، ۲۵ عضو دارد. به مجموعه A ، ۱۰ عضو جدید اضافه کردیم. به اشتراک آن‌ها ۹ عضو اضافه

شده است. اجتماع مجموعه B و مجموعه جدید حاصل از A ، چند عضو دارد؟

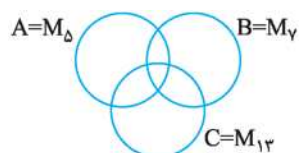
- ۲۵ (۱) ۲۶ (۲) ۳۴ (۴) ۳۵ (۴)

۱۲۸ اگر داشته باشیم: $E \subseteq \{5, 7, 8, 9, 11, 13\}$ و $E \cup \{4, 5, 11, 13\} = \{4, 5, 7, 8, 11, 13\}$ و $E \cap \{3, 5, 8, 11\} = \{5, 8\}$

مجموعه E چند عضو دارد؟

- ۳ (۱) ۴ (۲) ۵ (۳) ۴ (۴) نمی‌توان معلوم کرد.

۱۲۹ در نمودار مقابل M_5 و M_7 و M_{13} به ترتیب مجموعه‌ی ضربهای سه عدد ۵ و ۷ و ۱۳ هستند. عدد ۱۲۷۱۲۷ عضو کدام

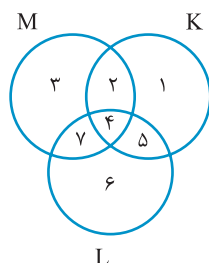


مجموعه زیر است؟

- (۱) $C - (A \cup B)$ (۲) $(A \cap B) - C$
(۳) $(A \cap C) - B$ (۴) $(B \cap C) - A$

(مدارس پرتیر ۹۶)

۱۳۰ مجموعه K و L و M در نمودار زیر مشخص شده‌اند. عدد ۵ در چه تعداد از مجموعه‌های زیر قرار دارد؟



- (الف) $(K \cap L) \cup M$ (ب) $(K \cup L) - M$
(پ) $(K \cup L) - L$ (ت) $(K \cap L) - (K \cap M)$

- (۱) یکی (۲) دوتا (۳) سه تا (۴) چهارتا

۱۳۱ فرض کنید A مجموع مربع‌ها، B مجموع لوزی‌ها، C مجموع مستطیل‌ها و D مجموع متوازی‌الاضلاع‌ها باشد. کدام گزینه

(المپیاد ریاضی مشور ۹۶)

درست نیست؟

- (۱) $A - (A \cap B) = \emptyset$ (۲) $D - (C \cup B) = \emptyset$
(۳) $D \cap A = (B \cup C) \cap A$ (۴) $(A \cup C) - C = \emptyset$

۱۳۲ کدام یک از عبارتهای زیر درست نیست:

- (۱) مجموعه‌ی ضربهای عدد ۹، زیرمجموعه‌ی ضربهای عدد ۳ است.
(۲) اشتراک همه‌ی زیرمجموعه‌های یک عضو هر مجموعه‌ی سه عضو، برابر با تهی است.
(۳) اجتماع همه‌ی زیرمجموعه‌های یک مجموعه، خود آن مجموعه است.
(۴) اگر $A \subseteq B$ باشد، آن‌گاه $A' \subseteq B'$.

۱۳۳ اگر A_n را به شکل مقابل تعریف کنیم: $A_n = \{x \mid -\frac{1}{n} < x < +\frac{1}{n}\}$ کدام رابطه‌ی زیر درست است؟

- (۱) $A_3 \cap A_{13} = \emptyset$ (۲) $A_4 \subseteq A_{10}$ (۳) $A_7 \cup A_8 = A_7$ (۴) $-\frac{1}{10} \in A_{11}$

۱۳۴ کدام جمله همواره درست است؟

- (۱) همه‌ی زیرمجموعه‌های یک مجموعه متناهی، متناهی‌اند.
(۲) هر زیرمجموعه‌ی یک مجموعه‌ی نامتناهی، نامتناهی است.
(۳) اشتراک دو مجموعه‌ی نامتناهی، نامتناهی است.
(۴) اگر $A \subseteq B$ ، متناهی باشد، B نیز متناهی است.

۱۳۵ با توجه به شکل مقابل کدام گزینه درست نیست؟



- (۱) $C - A = \emptyset$ (۲) $B - C \neq \emptyset$
(۳) $(A - B) \subset (A - C)$ (۴) $A \cap B = B \cap C$

۱۳۶ اگر A مجموعه دانش آموزانی باشد که نمره ی آن‌ها حداقل ۱۷ است و B مجموعه دانش آموزانی باشد که نمره ی آن‌ها

(داخلی تیزهوشان با اصلاح)

حداکثر ۱۵ است؛ در این صورت $A \cup B'$ کدام است؟

- (۱) مجموعه دانش آموزانی که نمره ی آن‌ها حداقل ۱۷ است.
- (۲) مجموعه دانش آموزانی که نمره ی آن‌ها بیشتر از ۱۵ است.
- (۳) مجموعه دانش آموزانی که نمره ی آن‌ها ۱۵ و یا کمتر از ۱۵ است.
- (۴) مجموعه همه ی دانش آموزان کلاس.

۱۳۷ اگر $A - B = \{2, 4, 8\}$ و $B - C = \{3, 6\}$ و $C - A = \{1, 5, 9\}$ و $A \cup B \cup C = \{1, 2, 3, \dots, 9\}$ باشد، آن‌گاه $A \cap B \cap C$ را

تشکیل می‌دهیم و اعضای آن را جمع می‌زنیم، کدام عدد حاصل می‌شود؟

- (۱) ۶ (۲) ۹ (۳) ۱۳ (۴) ۷

۱۳۸ اگر A_r مجموعه زیرمجموعه‌های دو عضوی مجموعه $A = \{a, b, c, d, e\}$ و B_r مجموعه زیرمجموعه‌های دو عضوی

مجموعه $B = \{a, b, c, e, f\}$ باشند، مجموعه $A_r \cap B_r$ چند عضو دارد؟

- (۱) ۶ (۲) ۷ (۳) ۸ (۴) ۹

۱۳۹ اگر A و B و C به ترتیب ۱۲، ۱۹، ۲۷ عضوی باشند و $A \cap B \cap C$ نیز ۷ عضوی باشند، آن‌گاه $(A \cup B \cup C) - (A \cap B \cap C)$

حداکثر چند عضو دارد؟

- (۱) ۵۱ (۲) ۴۴ (۳) ۳۷ (۴) ۳۰

۱۴۰ اگر $\{7, 5, 3, y\} \cap \{8, 5, x, 2, 10\} = \{5, 7, 2\}$ باشد، آن‌گاه $x + y$ چند است؟

- (۱) ۹ (۲) ۸ (۳) ۷ (۴) ۱۶

۱۴۱ اگر $A_n = \{1, 2, 3, \dots, n\}$ ، در این صورت حاصل $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$ کدام است؟

- (۱) A_1 (۲) A_n (۳) $A_n - A_1$ (۴) $A_n \cup A_1$



۱۴۲ A و B و C سه مجموعه دلخواه هستند و از سطر دوم به بعد هر مجموعه، تفاضل دو مجموعه‌ی

بالای سرخودش است (سمت چپ منهای سمت راست) مثلاً $D = A - B$ ، کدام گزینه حتماً درست

(المپیاد ریاضی)

است؟

- (۱) $F \subseteq C$ (۲) $B \subseteq F$ (۳) $F \subseteq A \cap C$ (۴) $D \cap C \subseteq F$

۱۴۳ اگر $A = \{4k + 1 \mid k \in \mathbb{Z}, k \geq 4\}$ و $B = \{6k - 5 \mid k \in \mathbb{N}, k \geq 3\}$ حاصل $A \cap B$ کدام مجموعه زیر است؟

- (۱) $\{12k + 1 \mid k \in \mathbb{N}, k > 4\}$ (۲) $\{12k + 1 \mid k \in \mathbb{N}, k > 1\}$
 (۳) $\{24k + 5 \mid k \in \mathbb{N}, k \geq 2\}$ (۴) $\{24k + 1 \mid k \in \mathbb{N}, k \geq 4\}$

۱۴۴ اگر $A = \{4x \mid x \in \mathbb{N}\} - \{3x \mid x \in \mathbb{N}\} = A$ باشد، کدام عضو زیر، در A نیست؟

- (۱) ۸۰ (۲) ۲۱۶ (۳) ۲۰۰ (۴) ۲۲۰

۱۴۵ حاصل $\{4x + 3 \mid x \in \mathbb{N}\} \cap \{6x + 5 \mid x \in \mathbb{W}\}$ کدام است؟

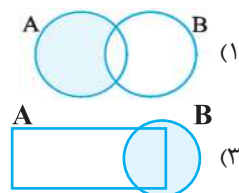
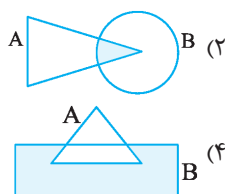
- (۱) $\{24x + 13 \mid x \in \mathbb{N}\}$ (۲) $\{12x - 1 \mid x \in \mathbb{W}\}$
 (۳) $\{12x + 11 \mid x \in \mathbb{W}\}$ (۴) $\{24x - 1 \mid x \in \mathbb{N}\}$

۱۴۶ مجموعه $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ حداکثر چند زیرمجموعه دارد در صورتی که اجتماع هیچ دو زیرمجموعه‌ای از آن مساوی با

A نشود؟

- (۱) ۳۲ (۲) ۲۸ (۳) ۲۴ (۴) ۱۶

۱۴۷ در کدام گزینه مجموعه‌ی $A - (A - B)$ درست رنگ خورده است؟



۱۴۸ اگر A و B دو مجموعه‌ی دلخواه باشند، کدام گزینه در حالت کلی نادرست است؟

- (۱) $A' - B' = B - A$
 (۲) اگر $A \subseteq B$ آن گاه $B' \subseteq A'$
 (۳) اگر $A \cap B = \emptyset$ آن گاه $A' \subseteq B$
 (۴) اگر $A \cap B' = A$ آن گاه $A \cap B = \emptyset$

۱۴۹ در چند مورد از حالت‌های زیر، حتماً نتیجه می‌شود که $B = A$ است؟

- (الف) $A \cap B' = A' \cap B = \emptyset$
 (ب) $A \cap B = A' \cap B' = \emptyset$
 (ج) $B' \subseteq A', A \subseteq B$
 (د) $A' = B'$
 (۱) یک مورد (۲) دو مورد (۳) سه مورد (۴) همه‌ی موارد

۱۵۰ به چند طریق می‌توان سه مجموعه‌ی A و B و C از $M = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ انتخاب کرد، طوری که رابطه‌ی $A \cap B = C$ برقرار باشد؟

- (۱) 2^7 (۲) 3×2^7 (۳) 2^{10} (۴) 3×2^{10}

۱۵۱ فرض کنید A_i نشان‌دهنده‌ی مجموعه مقسوم‌علیه‌های i باشد.

به عنوان مثال $A_6 = \{1, 2, 3, 6\}$ مجموعه‌ی $A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \dots \cup A_{100}$ چند عضو دارد؟ (سپیش مدرّس تیزهوشان تیریز ۹۸، تیزهوشان ۹۵)

- (۱) ۵۰ عضو (۲) ۱۰۰ عضو (۳) ۲۰۰ عضو (۴) ۳۷۷۵ عضو

۱۵۲ یازده زیرمجموعه‌ی غیر مساوی از $\{1, 2, 3, \dots, 10\}$ را طوری انتخاب می‌کنیم که از هر دوتای آن‌ها، یکی زیرمجموعه دیگری باشد.

اگر A, B, C به ترتیب مجموعه‌های ۷ و ۵ و ۳ عضوی این ۱۱ مجموعه باشند، در مورد $A \cup (B - C)$ چه می‌توان گفت؟ (تیزهوشان ۹۷)

- (۱) ۱۱ عضوی است. (۲) ۹ عضوی است. (۳) ۷ عضوی است. (۴) ۵ عضوی است.

۱۵۳ اگر $A = \{1, \{1\}, \{1, 2\}\}$ و $B = \{1, 2\}$ و $C = \{1, \{1\}\}$ آن گاه کدام یک از گزینه‌های زیر نادرست است؟ (تیزهوشان ۹۸)

- (۱) $C \subseteq A$ (۲) $n(A \cap C) = 2$ (۳) $A \cap B = \{1, 2\}$ (۴) $(B - C) \cap A = \emptyset$

۱۵۴ اگر A, B, C, D چهار مجموعه باشند طوری که $((A \cup B) - C) - D = D$ ، آن گاه حاصل $A \cup B \cup C \cup D$ همواره برابر

است با: (تیزهوشان ۹۸)

- (۱) $\emptyset$ (۲) C (۳) D (۴) $A \cup B$



قوانین اعمال بین مجموعه‌ها

۱۵۵ اگر A مجموعه‌ی اعداد بخش‌پذیر بر ۳ و B مجموعه‌ی اعداد بخش‌پذیر بر ۵ باشند و $x \in (A' \cup B)'$ ، کدام حکم

(تیزهوشان ۸۰)

درست است؟

- (۱) x بر ۳ و ۵ بخش‌پذیر است.
 (۲) x بر ۵ بخش‌پذیر است و بر ۳ بخش‌پذیر نیست.
 (۳) x نه بر ۳ بخش‌پذیر است نه بر ۵.
 (۴) x بر ۳ بخش‌پذیر است و بر ۵ بخش‌پذیر نیست.

(تیزهوشان ۸۲)

۱۵۶ حاصل $(A \cap B) \cap (A \cap B)'$ کدام است؟

- (۱) B (۲) A (۳) $\emptyset$ (۴) $A \cap B$

۱۵۷ کدام یک از روابط زیر نادرست است؟

- (۱) $A' - B = B' - A$ (۲) $(A \cup B) \subseteq (A \cap B)$ (۳) $(A \cap B) \subseteq A$ (۴) $\emptyset \cap (A - B) = \emptyset$

(المپیاد بلژیک)

۱۵۸ اگر X و Y و Z زیرمجموعه‌هایی از مجموعه‌ی E باشند، کدام گزاره همواره درست است؟

$$(۱) \quad X \cap Y = E \rightarrow X = Y = E \quad (۲) \quad X \cap Y = X \cup Z \rightarrow Y = Z$$

$$(۳) \quad (X \cap Y') \cup (X' \cap Y) = Y \rightarrow X = \emptyset \quad (۴) \quad X \cap Y = X \cap Z \rightarrow Y = Z$$

۱۵۹ حاصل عبارت $[(A \cap B) - A] \cup [(A \cup B) - B]$ در مجموعه‌ها چیست؟

$$(۱) \quad A \cap B \quad (۲) \quad A - B \quad (۳) \quad \emptyset \quad (۴) \quad A \cup B$$

۱۶۰ حاصل عبارت $[(A \cap B) - C] - (A \cup B)$ کدام است؟

$$(۱) \quad \emptyset \quad (۲) \quad A \cap B \quad (۳) \quad A \cup B \quad (۴) \quad A \cap B \cap C$$

(کنکور آزاد تهرانی)

۱۶۱ در مجموعه‌ها حاصل $(A \cap B) - (A - B)$ کدام است؟

$$(۱) \quad \emptyset \quad (۲) \quad A \cap B \quad (۳) \quad B - A \quad (۴) \quad A - B$$

۱۶۲ حاصل $[(A - B) - (B - A)] \cap [(B - A) - (A - B)]$ در مجموعه‌ها کدام است؟

$$(۱) \quad A \cap B \quad (۲) \quad A \cup B \quad (۳) \quad (A - B) \cup (B - A) \quad (۴) \quad \emptyset$$

۱۶۳ حاصل $(A \cap B')' \cap B$ کدام گزینه است؟

$$(۱) \quad B \quad (۲) \quad A \quad (۳) \quad M \quad (۴) \quad A \cap B'$$

۱۶۴ اگر A و B دو مجموعه‌ی جدا از هم باشند، حاصل $[B \cup (A \cap B)] \cup (A' \cup B)$ کدام است؟

$$(۱) \quad A \cap B' \quad (۲) \quad A \cup B \quad (۳) \quad A \cup B' \quad (۴) \quad A' \cap B$$

۱۶۵ متمم مجموعه‌ی $[(A \cap B') \cup (A' \cup B)]$ کدام است؟

$$(۱) \quad A - B \quad (۲) \quad M \quad (۳) \quad B - A \quad (۴) \quad \emptyset$$

۱۶۶ اگر داشته باشیم $A \cap C = B \cap C$ و $A \cap C' = B \cap C'$ مجموعه‌ی B برابر کدام است؟

$$(۱) \quad C \quad (۲) \quad A \cap B \quad (۳) \quad A \quad (۴) \quad A \cup C$$

۱۶۷ حاصل عبارت $(A \cup B' \cup C') \cap ((B \cap C) \cup A)$ کدام است؟

$$(۱) \quad A \quad (۲) \quad A' \quad (۳) \quad B \quad (۴) \quad B'$$

۱۶۸ حاصل عبارت $(A \Delta B) \cup [(A \cup B)' \cup (A \cap B)]$ کدام است؟

$$(۱) \quad M \quad (۲) \quad \emptyset \quad (۳) \quad A \Delta B \quad (۴) \quad A - B$$

۱۶۹ اگر A و B و C مجموعه باشند، حاصل $[A \cap (B \cup C)] - [(B - C) \cup A]$ کدام است؟

$$(۱) \quad \emptyset \quad (۲) \quad A \quad (۳) \quad A \cap B \quad (۴) \quad C$$

۱۷۰ در مجموعه‌ها کدام رابطه درست نیست؟

$$(۱) \quad [(A \cup B') \cap C] \cup (A \cap C) = C \quad (۲) \quad A' \cap [(B' \cap A') \cup B] = A'$$

$$(۳) \quad [A \cup (A \cap B')] = A' \quad (۴) \quad (A \cap B \cap C) \cup (A' \cap C) \cup (B' \cap C) = M$$



عدد اصلی اشتراک و تفاضل مجموعه‌ها

۱۷۱ در یک کلاس، ۱۷ نفر عضو تیم «ریاتیک» و ۱۳ نفر، عضو تیم «روبوکاپ» (شبیه‌سازی فوتبال روبات‌ها) می‌باشند. اگر ۸ نفر

(روبوکاپ ۸۹)

عضو هر دو تیم باشند و ۳ نفر عضو هیچ تیمی نباشند، این کلاس چند دانش آموز دارد؟

$$(۱) \quad ۳۰ \quad (۲) \quad ۲۷ \quad (۳) \quad ۲۵ \quad (۴) \quad \text{قابل محاسبه نیست}$$

۱۷۲ در یک گروه هشت نفری ۵ نفر عینک می‌زنند و ۶ نفر ساعت دارند. چند نفر هم عینک می‌زنند هم ساعت دارند؟ (انرژی اتمی)

(۱) حداکثر ۳ نفر (۲) حداقل ۳ نفر (۳) دقیقاً ۳ نفر (۴) حداقل ۵ نفر

۱۷۳ مجموعه‌ی $A \cup B$ دارای ۵ عضو، $A \cap B$ دارای ۲ عضو و $A - B$ نیز دارای ۲ عضو می‌باشد، مجموعه‌ی $B - A$ چند عضو دارد؟

(۱) ۴ (۲) ۳ (۳) ۲ (۴) ۱

۱۷۴ در یک باشگاه ورزشی ۵۹ نفر عضو هستند؛ ۲۹ نفر در فوتبال، ۳۲ نفر در بسکتبال و ۲۰ نفر در والیبال عضو هستند. از طرفی

۷ نفر در بسکتبال و فوتبال، ۸ نفر در فوتبال و والیبال و ۱۰ نفر در بسکتبال و والیبال عضو می‌باشند. چند نفر فقط در یک رشته‌ی ورزشی عضویت دارند؟ (روبوکاپ ۸۹)

(۱) ۴۱ (۲) ۴۰ (۳) ۳۹ (۴) ۳۸

۱۷۵ در یک گردهمایی ۱۳۱ نفر زبان فرانسه می‌دانند. ۱۴۱ نفر انگلیسی، ۹۹ نفر ایتالیایی، ۵۲ نفر هم فرانسه هم انگلیسی، ۳۵

نفر هم انگلیسی و هم ایتالیایی، ۳۸ نفر هم فرانسه و هم ایتالیایی؛ ۲۱ نفر هر سه زبان را می‌دانند. در این گردهمایی، چند نفر هستند که حداقل یکی از ۳ زبان را می‌دانند؟

(۱) ۲۲۵ (۲) ۲۶۷ (۳) ۳۰۹ (۴) ۳۷۱

۱۷۶ دانش‌آموزان سال چهارم یک دبیرستان ۲۵۰ نفرند. هر کدام یک گروه ورزشی انتخاب کرده‌اند. ۴۰٪ آن‌ها فوتبال و نصف

بقیه، والیبال بازی می‌کنند. چند دانش‌آموز فوتبال یا والیبال بازی نمی‌کنند؟

(۱) ۷۵ (۲) ۸۰ (۳) ۸۵ (۴) ۹۰

۱۷۷ اگر $n(A \cup B) = ۲۱$ و $n(A - B) = ۷$ باشد، تعداد اعضای مجموعه‌ی B چه تعداد می‌تواند باشد؟

(۱) ۷ (۲) ۱۴ (۳) ۱۳ (۴) نامعلوم

۱۷۸ در یک کلاس ۵۳ نفری، ۳۰ نفر در درس فیزیک قبول شده‌اند و ۲۷ نفر در درس ریاضی قبول شده‌اند. اگر ۱۱ نفر در هر دو

درس مردود شده باشند، چند نفر در هر دو درس قبول شده‌اند؟

(۱) ۱۱ (۲) ۱۳ (۳) ۱۵ (۴) ۱۷

۱۷۹ اگر $n(A - B) = ۱۷$ و $n(B - A) = ۵$ و $n(B) = ۱۳$ باشد، $n(A \cup B)$ کدام است؟

(۱) ۲۷ (۲) ۳۰ (۳) ۲۹ (۴) ۲۸

۱۸۰ ۸۴٪ دانش‌آموزان یک مدرسه در المپیاد ریاضی، ۸۰٪ در المپیاد فیزیک، ۷۵٪ در المپیاد شیمی و ۶۹٪ آن‌ها در المپیاد

زیست‌شناسی شرکت کرده‌اند. حداقل چند درصد آن‌ها در هر ۴ المپیاد شرکت کرده‌اند؟ (المپیاد ریاضی)

(۱) ۴٪ (۲) ۸٪ (۳) ۱۲٪ (۴) ۱۶٪

۱۸۱ شاهزاده خانمی ۲۵ خواستگار دارد. هیچ خواستگاری هم «زیبا» هم «باهوش» هم «پولدار» نیست. ۸ نفر زیبا، ۱۷ نفر پولدار،

۱۳ نفر باهوش هستند، ۶ نفر نه زیبا هستند، نه باهوش نه پولدار. اگر خواستگاری که انتخاب می‌شود باید هم زیبا و هم باهوش

باشد، چند نفر از خواستگاران شانس انتخاب شدن دارند؟

(۱) ۱ نفر (۲) ۲ نفر (۳) ۵ نفر (۴) ۲۱ نفر

۱۸۲ اگر A و B دو مجموعه‌ی متناهی باشند و تعداد اعضای $A \cup B$ سه برابر تعداد اعضای B و تعداد اعضای A ، $\frac{5}{2}$ برابر تعداد

اعضای B باشد؛ همچنین تعداد اعضای که به هر دو تعلق دارند، برابر ۳ باشد، آن‌گاه تعداد اعضای که حداقل به یکی از دو

مجموعه‌ی A یا B تعلق دارد چند است؟

(۱) ۶ (۲) ۱۲ (۳) ۱۸ (۴) ۲۴

۱۸۳ هر کدام از مجموعه‌های A ، B و C ، ۱۰ عضو دارند. اگر $A \cap B$ و $A \cap C$ هر کدام ۲ عضو داشته باشند و $B \cap C$ حداکثر ۳

عضو داشته باشد، $A \cup B \cup C$ حداکثر چند عضو دارد؟

(۱) ۲۲ (۲) ۲۳ (۳) ۲۴ (۴) ۲۵

۱۸۴ $A \cup C$ دوعضو بیشتر از A دارد و $B \cup C$ سه عضو بیشتر از B دارد. اگر $C - (A \cup B)$ و $A \cap B \cap C$ هر کدام دو

زیرمجموعه داشته باشند، آن گاه مجموعه C چند زیرمجموعه دارد؟

- (۱) ۳۲ (۲) ۶۴ (۳) ۱۶ (۴) ۸

۱۸۵ مجموعه $C - (A - B)$ ، ۲۵ عضو دارد و مجموعه $A - C$ دارای ۳۰ عضو است. کدام مطلب در مورد مجموعه $B - C$ صحیح است؟

- (۱) دقیقاً ۵ عضو دارد. (۲) حداقل ۵ عضو دارد. (۳) حداکثر ۵ عضو دارد. (۴) نمی تواند ۵ عضوی باشد.

۱۸۶ اگر $n(A \cup B) = ۱۱$ و $n(A \cap B) = ۳$ باشد و نیز $n(A) < n(B)$ ، آن گاه $n(B)$ کدام گزینه نمی تواند باشد؟

- (۱) ۸ (۲) ۹ (۳) ۷ (۴) ۱۰

۱۸۷ در یک کلاس ۲۳ نفر علاقمند به المپیاد ریاضی هستند. ۱۸ نفر علاقمند به المپیاد شیمی و ۱۲ نفر علاقمند به المپیاد فیزیک

هستند. هیچ کس وجود ندارد که به هر سه علاقمند باشد، اما ۱۰ نفر هستند که به المپیاد شیمی و ریاضی علاقمندند و ۶ نفر

هم هستند که به المپیاد فیزیک و ریاضی علاقمند هستند. این کلاس حداقل چند نفر دارد؟ (انرژی اتمی ۹۷)

- (۱) ۲۹ (۲) ۳۱ (۳) ۳۳ (۴) ۴۳



بسته بودن مجموعه نسبت به یک عمل

۱۸۸ می گوئیم مجموعه ای نسبت به عمل تفریق بسته است؛ در صورتی که هر دو عضو آن را از هم تفریق کنیم، حاصل به همان

مجموعه متعلق باشد. کدام یک از مجموعه های زیر نسبت به عمل تفریق بسته نیست؟ (مفید)

- (۱) $\mathbb{R}$ (۲) $\mathbb{Q}$ (۳) $\mathbb{Z}$ (۴) $\mathbb{N}$

۱۸۹ کدام مجموعه ی زیر فقط نسبت به عمل ضرب بسته است؟

- (۱) $\{0, -1\}$ (۲) $\mathbb{N}$ (۳) $\{1, -1\}$ (۴) $\{0, 1, -1\}$

۱۹۰ مجموعه ی اعداد گنگ نسبت به کدام عمل بسته است؟

- (۱) فقط جمع (۲) جمع و ضرب (۳) فقط تقسیم (۴) هیچ کدام

۱۹۱ کدام گزینه نادرست است؟

- (۱) $a, b \in \mathbb{Z}, a - b \in \mathbb{Z}$ (۲) $a, b \in \mathbb{Z} \rightarrow a \times b \in \mathbb{Z}$

- (۳) $a, b \in \mathbb{Z} \rightarrow a + b \in \mathbb{Z}$ (۴) $a, b \in \mathbb{Z} \rightarrow \frac{a}{b} \in \mathbb{Z}$

۱۹۲ مجموعه ی اعداد طبیعی مربع کامل نسبت به کدام عمل زیر بسته است؟

- (۱) جمع (۲) ضرب (۳) تقسیم (۴) جذرگرفتن

۱۹۳ چه تعداد از گزاره های زیر درست هستند؟

الف) مجموعه $A = \{2k + 1 \mid k \in \mathbb{N}\}$ فقط نسبت به ضرب بسته است.

ب) مجموعه $B = \{2^k + 1 \mid k \in \mathbb{N}\}$ نسبت به هیچ عملی (از ۴ عمل اصلی) بسته نیست.

ج) مجموعه $C = \{\sqrt{2a + b} \mid a, b \in \mathbb{N}\}$ نسبت به ضرب و جمع بسته است.

- (۱) هیچ (۲) یک

- (۳) دو (۴) همه ی عبارات درست است.

۱۹۴ اگر $A = \{a, 0, -a\}$ نسبت به ضرب بسته باشد، a چند مقدار مختلف می تواند باشد؟

- (۱) یک (۲) دو (۳) سه (۴) هیچ

(تیزهوشان ۹۱)

(تیزهوشان)

۱۹۵ اگر A و B غیر تهی باشند و $A \subset B$ باشد چند عبارت صحیح است؟

(الف) اگر A نسبت به جمع بسته باشد، B نیز نسبت به جمع بسته است.

(ب) اگر A نسبت به ضرب بسته باشد، B نیز نسبت به ضرب بسته است.

(ج) اگر B نسبت به ضرب بسته باشد، A نیز نسبت به ضرب بسته است.

(د) اگر A نسبت به تقسیم بسته باشد و $A \neq B$ ، آنگاه $B - A$ نسبت به تقسیم بسته نیست!

(۱) یک (۲) دو (۳) سه (۴) هیچ کدام

۱۹۶ کدام گزینه نسبت به ضرب بسته است؟

(۱) $\{k+2 \mid k \in \mathbb{Z}\}$ (۲) $\{5k-1 \mid k \in \mathbb{Z}\}$ (۳) $\{4k+5 \mid k \in \mathbb{Z}\}$ (۴) $\{3k+2 \mid k \in \mathbb{Z}\}$

۱۹۷ چند عبارت صحیح است؟

(الف) اعداد اول نسبت به هیچ عملی بسته نیستند. (ب) اعداد مرکب فقط نسبت به ضرب بسته اند.

(ج) $\{0\} - \mathbb{Q}$ نسبت به تقسیم بسته است. (د) $\mathbb{R} - \{0\}$ نسبت به $\cdot$ عمل بسته است.

(۱) یک (۲) دو (۳) سه (۴) همه عبارات صحیح است.

خلاقیتی و ترکیبی

(انرژی اتمی ۸)

۱۹۸ مجموعه‌ی $\{2^{1281}, \dots, (2^{1280} + 6), (2^{1280} + 4), (2^{1280} + 2)\}$ چند عضو دارد؟

(۱) 2^{1278} (۲) 2^{1279} (۳) 2^{1280} (۴) 2^{1281}

۱۹۹ مجموعه‌ی B مجموعه‌ای است شامل اعداد کمتر از ۱۰۰۰ که اگر هر دو عضو آن را جمع بزنیم، حاصل جمع در B نیست! B

حداکثر چند عضو دارد؟

(۱) ۳۰۰ (۲) ۴۰۰ (۳) ۴۵۰ (۴) ۵۰۰

۲۰۰ در مجموعه‌ی $A = \{1, 2, 3, \dots, 10\}$ چند زیرمجموعه وجود دارد که مجموع کوچک‌ترین و بزرگ‌ترین عضو آن‌ها برابر ۱۱ باشد؟

(المپیاد ریاضی ایران)

(۱) ۳۴۱ (۲) ۳۶۱ (۳) ۳۴۰ (۴) ۳۶۰

۲۰۱ C مجموعه‌ای از اعداد طبیعی کمتر از ۱۰۰۰ هست که حاصل ضرب هیچ دو عضوی از C در آن نیست. C حداکثر چند عضو دارد؟

(۱) ۹۶۵ (۲) ۹۶۶

(۳) ۹۶۷ (۴) ۹۶۸

۲۰۲ یک زیرمجموعه از $\mathbb{N}$ (اعداد طبیعی) را «خوب» می‌نامیم؛ در صورتی که بتوان اعضای آن را به دو دسته تقسیم کرد که جمع اعداد دسته‌ی اول با جمع اعداد دسته‌ی دوم برابر شود. کدام مجموعه زیر «خوب» است؟

(تیزهوشان)

(۱) $\{1, 2, 3, \dots, 20\}$ (۲) $\{1^2, 2^2, 3^2, \dots, 31^2\}$ (۳) $\{1, 2, 3, \dots, 21\}$ (۴) $\{1^2, 2^2, 3^2, \dots, 10^2\}$

۲۰۳ مجموعه‌ی $A = \{-9, -5, -4, -1, 3\}$ را در نظر بگیرید. شش عدد از A انتخاب کرده‌ایم و آن‌ها را به سه جفت دوتایی تقسیم کرده‌ایم. طوری که جمع عددهای این جفت‌ها برابر باشند. چه عددی از A انتخاب نشده بود؟

(۱) ۵ (۲) ۰ (۳) -۳ (۴) -۵

۲۰۴ در مجموعه‌ی اعداد $\{1, 2, 3, \dots, 1388\}$ بزرگ‌ترین زیرمجموعه‌ای که تفاضل هیچ دو عضو آن عددی اول نباشد، چند عضوی است؟

(۱) ۶۹۴ (۲) ۳۴۷ (۳) ۶۹۵ (۴) ۳۴۶

۲۰۵ از بین اعداد مجموعه‌ی $\{1, 2, 3, \dots, 54\}$ حداکثر چند عدد می‌توان انتخاب کرد، به طوری که تفاضل هیچ دوتایی از آن‌ها برابر با ۴ نباشد؟

(۱) ۲۶ (۲) ۲۷ (۳) ۲۸ (۴) ۲۹

۲۰۶ از مجموعه $\{1, 2, 3, \dots, 20\}$ حداقل چند عدد را باید حذف کنیم تا مجموع هیچ دو عدد باقی‌مانده، عددی اول نباشد؟

- (۱) ۷ (۲) ۸ (۳) ۹ (۴) ۱۰

۲۰۷ حداکثر چند زیرمجموعه از مجموعه $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ می‌توان انتخاب کرد، طوری که اجتماع هیچ دو زیرمجموعه‌ای از آن مساوی با مجموعه X نشود؟

- (۱) ۸ (۲) ۱۰ (۳) ۱۶ (۴) ۲۰

۲۰۸ مجموعه $A = \{1, 2, 3, \dots, 9\}$ چند زیرمجموعه دارد که اختلاف بزرگ‌ترین و کوچک‌ترین عضو آن برابر با ۵ باشد؟

- (۱) ۴۸ (۲) ۳۲ (۳) ۶۴ (۴) ۵۶

۲۰۹ اگر $A = \{1, 2, 3, \dots, 100\}$ باشد، آن‌گاه زیرمجموعه‌ای از A با این شرط که هیچ عضو آن برابر دیگری نباشد، حداکثر چند عضوی است؟

- (۱) ۶۶ (۲) ۶۷ (۳) ۶۹ (۴) ۷۰

۲۱۰ حداقل چند عضو از مجموعه $\{1, 2, 3, \dots, 30\}$ را باید حذف کرد تا تفاضل هیچ دو عدد باقی‌مانده‌ای برابر ۱۰ نشود؟ (المپیاد ریاضی ایران)

- (۱) ۱۹ (۲) ۱۰ (۳) ۱۵ (۴) ۲۰

۲۱۱ حداقل چند عضو از مجموعه $\{1, 2, 3, \dots, 28\}$ باید حذف کنیم تا حاصل ضرب اعضای باقی‌مانده مربع کامل شود؟

(تالیفی ۹۵ - کاتگورو ۹۷)

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۴ (۴) ۵

۲۱۲ مجموعه $\{1, 2, 3, \dots, 99, 100\}$ را در نظر بگیرید. کدام یک از مجموعه‌های زیر بزرگ‌ترین میانگین را دارد؟ (انرژی اتمی)

- (۱) مجموع مضارب عدد ۴ (۲) مجموع مضرب‌های عدد ۱۰ (۳) مجموع مضرب‌های عدد ۸ (۴) مجموع مضرب‌های عدد ۱۲

۲۱۳ کدام یک از اعداد زیر عضو مجموعه $A = \{2^{x+y} - 2^x - 2^y \mid x, y \in \mathbb{N}\}$ است؟

- (۱) $257 \times 129 + 1$ (۲) $255 \times 127 - 1$ (۳) $257 \times 129 - 1$ (۴) $255 \times 127 + 1$

۲۱۴ اعضای مجموعه A را می‌توان به صورت مجموع ۴ عدد طبیعی متوالی و عضوهای مجموعه B را می‌توان به صورت مجموع ۵ عدد طبیعی متوالی نوشت، $A \cap B$ کدام است؟

- (۱) $\{5k + 10 \mid k \in \mathbb{N}\}$ (۲) $\{15k + 20 \mid k \in \mathbb{N}\}$ (۳) $\{20k + 10 \mid k \in \mathbb{N}\}$ (۴) $\{30k + 15 \mid k \in \mathbb{N}\}$

۲۱۵ اگر $A = \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}, n < 100\}$ و $B = \{\frac{2}{n} \mid n \in \mathbb{N}, n < 100\}$ و $C = \{\frac{3}{n} \mid n \in \mathbb{N}, n < 100\}$ آن‌گاه $A \cup B \cup C$ چند عضو دارد؟

- (۱) ۱۸۲ (۲) ۲۱۵ (۳) ۲۷۰ (۴) ۲۹۷



گزینه ۴

پاسخ علی با بررسی سایر پاسخ‌ها رد می‌شود!
بهبود کلاً در فضای دیگری سیر می‌کند و شاید منظور آقای کاهه را نگرفته!
مهرداد درست می‌گوید؛ ولی مجموعه‌اش ۲ عضوی است نه ۳ عضوی
چون $\{\} = \emptyset$ و ما گول نمی‌خوریم!
می‌ماند شایان که ان‌شاءالله درست گفته باشد!

$$\emptyset, \{\emptyset\} \Rightarrow \emptyset \in \{\emptyset\}$$

$$\{\emptyset, \{\emptyset, \{\emptyset\}\} \Rightarrow \{\emptyset\} \in \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$$

...

گزینه ۲

در A عضوی به شکل $\emptyset$ نداریم؛ پس $\emptyset \in A$ غلط است.
 $\emptyset \in A$ درست
 $\{\{\}\} \notin A$ درست، چون در A عضوی به شکل $\{\{\}\}$ نداریم!
 $\{0\} \in A$ نادرست
پس دو عبارت درست است؛ دومی و چهارمی و دیگر گزینه‌ها نادرستند!

گزینه ۱۰

واضح است: $a - 1 = -3$ پس $a = -2$ و $b + 2 = 7$ و $b = 5$
پس $ab = -2 \times 5 = -10$

گزینه ۱۱

حالت‌های مختلف را می‌نویسیم که دو مجموعه مساوی می‌شوند:
 $x = 1, y = 1$
 $x = -1, y = -1$
 $x = 0 \rightarrow A \neq B$ یافت نمی‌شود

گزینه ۱۲

با کمی دقت در مقایسه‌ی دو مجموعه و کمی تفکر خلاق! می‌توان به
تساوی‌های زیر رسید!

$$\begin{cases} 2 + x = z \\ x - y = -1 \\ x + y = 3 \end{cases}$$

$$2x = 2 \Rightarrow \boxed{x=1} \Rightarrow 1 + y = 3 \Rightarrow \boxed{y=2}$$

$$2 + x = z \Rightarrow \boxed{z=3}$$

$$x^2 + 2y^2 + z^2 = 1 + 8 + 9 = 18$$

گزینه ۱۳

اگر بفهمیم مجموعه یک عضوی شود باید دو عضو برابر شوند.
 $3x - 3 = 5 - x \Rightarrow 4x = 8 \Rightarrow x = 2$
دقت کنید ۲ عضو این مجموعه نیست!
مقدار عضو $3x - 3 = 3 \times 2 - 3 = 3 = 3$

گزینه ۳

در همین ابتدا بگوییم که خیلی به پاسخنامه مراجعه نکنید! در مقدمه هم گفتیم
سؤالاتی که درست حل کردید، پاسخنامه را ببینید تا مطمئن شوید که راه
بهتری وجود ندارد و راه‌ها را درست است!
تنها اعدادی که در این معادله صدق می‌کنند $x = 0$ و $y = 1$ است.
یعنی جواب مشخص دارد. (برخلاف بقیه گزینه‌ها)

گزینه ۲

(۱) عددی که نه مثبت باشد نه منفی، صفر است؛ پس این مجموعه
تهی نیست!
(۲) عددی که نه اول باشد نه مرکب عدد ۱ است؛ پس این مجموعه
هم تهی نیست!
(۳) اعداد اول بخش‌پذیر بر ۷، عدد ۷ است؛ یعنی مجموعه‌ی یک
عضوی است.
(۴) این مجموعه تهی است.

گزینه ۳

داخل مجموعه A یک عضو هست که همان مجموعه B است. یعنی
 $A \in B$

گزینه ۲

چون $5 \in M$ می‌تواند ۵ یا ۴ یا ۷ یا ۲ باشد ولی چون $7 \notin M$
پس a نمی‌تواند ۴ یا ۷ باشد، پس ۲ مقدار می‌تواند باشد یا ۵ یا ۲.

گزینه ۵

ابتدا A را تشکیل می‌دهیم:
 $66 \div 3 = 22 \Rightarrow A = \{20, 22, 24\}$
گزینه (۲) نادرست است؛ چون: $24 \in A$

گزینه ۲

$A = \{1\}$ مجموعه‌ای یک عضوی است.
 B مجموعه‌ای ۲ عضوی است.
 C مجموعه‌ای ۱۱ عضوی است؛
چون $10^2 = (-10)^2$ و $9^2 = (-9)^2$ ، ...
 D مجموعه‌ای ۴ عضوی است.
پس، B بیشترین تعداد عضو را دارد.

گزینه ۲

مجموعه A را می‌توان ساده‌تر نوشت؛ ولی ۴ عضو را دارد:

$$A = \{1, \{\}, \{\{1\}\}, \{\{\{1\}\}\}\} \Rightarrow n(A) = 4$$

$$B = \{\emptyset, \{\{\}\}\} \Rightarrow n(B) = 2$$

$$n(A) - n(B) = 4 - 2 = 2$$

۱۴ گزینه ۲

مشابه سؤال ۱۳ عمل می‌کنیم:

$$2x + 3 = x - 9 \Rightarrow x = -12$$

$$\Rightarrow 2x + 3 = -24 + 3 = -21$$

$$3y = -21 \Rightarrow y = -7$$

۱۵ گزینه ۱

آزمون تیزهوشان بعضی وقتا خیلی عجیب می‌شه. یه بار توی یه آزمون ۳ تا سؤال از مجموعه‌ها داره بورنر! که همه تعجب کردیم!!!

$$1 \in A \Rightarrow 2, 4, 8, 16, \dots \in A$$

$$0, 2, 6, 14, \dots \in A$$

$$1 \in A \Rightarrow -1, -3, -5, \dots \in A$$

$$0 \in A \Rightarrow -2, -6, -10, \dots \in A$$

با توجه به اینکه عملیات‌ها را می‌توان برای هر دو سری اعداد بالا مرتب تکرار کرد، نتیجه می‌شود مجموعه A شامل تمام اعداد منفی صحیح و صفر و تمام اعداد زوج مثبت می‌باشد؛ یعنی عدد فرد مثبت در مجموعه A تولید نمی‌شود!

۱۶ گزینه ۲

مجموعه A تا A شامل اعداد ۱ تا ۴۵ هستند:

A یک عضو، A دو عضو و ... A نه عضو دارد که جمع آن‌ها برابر

$$1 + 2 + \dots + 9 = \frac{9 \times 10}{2} = 45$$

است با:

یعنی در A، اعداد ۱ تا ۴۵ نوشته شده‌اند؛ پس A با ۴۶ شروع می‌شود.

۱۷ گزینه ۴

در N قرینه‌ی اعضاء وجود ندارد!

۱۸ گزینه ۴

مجموع اعضاء سه مجموعه برابرند؛ پس می‌توان نوشت:

$$7 + 8 + x + y = 9 + x + 4 + z + w$$

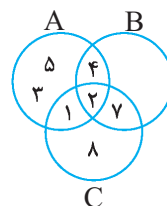
$$\Rightarrow y = z + w - 2 \Rightarrow z + w - y = 2$$

اگر این رابطه را برای دو مجموعه‌ی دیگر بنویسیم، به تساوی جدیدی نمی‌رسیم. با توجه به اینکه اعداد ۷، ۸، ۹، ۴، ۳ و ۲ و ۱ و ۵ هستند، به روش آزمایش و خطا می‌رویم. معلوم می‌شود هیچ کدام از سه عدد نمی‌توانند ۵ باشند، حال اگر ۷ و ۸ و ۹ برابر با ۱ و ۳ و ۲ در نظر بگیریم، داریم:

$$1 + 3 - 2 = 2 \Rightarrow x = 5$$

۱۹ گزینه ۱

اعداد را در مجموعه چیدمان می‌کنیم (!)



$$A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

$$B = \{2, 7, 4\}$$

$$C = \{1, 2, 7, 8\}$$

عدد ۲ در هر سه مشترک است.

عدد ۱ فقط در A و C هست، در B نیست.

عدد ۴ در A و B هست، در C نیست.

عدد ۷ در B و C هست در A نیست. $2 + 8 = 10 =$ بخش هاشورزده

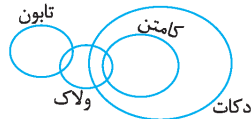
۲۰ گزینه ۴

در نگاه اول سؤال بی‌ربط به نظر می‌رسد؛ ولی کمی که دقت کنیم...

در گزینه‌های ۱ و ۲ و ۳ A و B بخشی مشترک دارند و قسمت‌هایی هم غیرمشترک ولی در گزینه (۴)، $B \subseteq A$ است و تمام اعضاء B با A مشترک است.

۲۱ گزینه ۴

فیلی سعی کردم معنی کلمات رو بفهمم ولی چیزی دستگیرم نشد. شما هم بیوفور تلاش کنید!!!



نمودار زیر را با توجه به معلومات

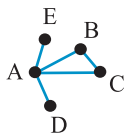
تست رسم می‌کنیم:

گزینه‌ها را با توجه به شکل بالا بررسی کنید. همگی نادرستند، به جز گزینه (۴).

۲۲ گزینه ۳

باید بر ۱۵ و ۸ بخش پذیر باشد (یعنی مضرب ۱۲۰ باشد) و بر ۹ بخش پذیر نباشد. گزینه (۳) درست است.

۲۳ گزینه ۱



گزینه (۱) را بررسی می‌کنیم، مثلاً $A = \{1, 2\}$ و

$B = \{1, 3\}$ و $C = \{1, 4\}$ ، یعنی هر ۳ مجموعه

یک عضو مشترک دارند و به هم وصل می‌شوند.

حالا E را $\{2, 5\}$ بگیریم و برای D نمی‌توان عضو مشخص کرد، چون D باید عضوی داشته باشد که در A باشد ولی در E و C نباشد! امکان ندارد.

۲۴ گزینه ۱

چنین عضوی در A نیست. $\{\emptyset\}$ عضو A هست ولی $\{\{\emptyset\}\}$ زیرمجموعه A محسوب می‌شود.

۲۵ گزینه ۱

هر متوازی‌الاضلاعی که قطرهاش بر هم عمود باشد، لوزی است.

۲۶ گزینه ۳

اشتباه نکنید، مجموعه A سه عضوی نیست! A یک عضوی است و عضو آن $\{4\}$ است و چون $\{4, 4, 4\} = \{4, 4\} = \{4\}$ ؛ پس ۲ زیرمجموعه دارد: $\emptyset, \{\{4\}\}$

۲۷ گزینه ۲

سایر گزینه‌ها درستند. هر کدام یک نکته‌ی کلیدی هستند. حتماً با دقت آن‌ها را بررسی کنید.

ولی گزینه (۲) نادرست است، درست آن به شکل زیر است:

اگر $B \subseteq A$ ، $x \notin A$ آن‌گاه $x \notin B$

گزینه ۳۷

مجموعه‌ی n عضو 2^n زیرمجموعه دارد که طبق فرض سؤال برابر است با n^2 ، پس:

$$2^n = n^2 \Rightarrow n = 4 \text{ یا } 2$$

گزینه ۳۸

می‌دانیم در یک مجموعه‌ی n عضو تعداد زیرمجموعه‌های k عضو و $n-k$ عضو برابرند. یعنی:

$$\text{تعداد اعضا } (n-k) + k = n = 16 \Rightarrow 10 + 6 = 16$$

گزینه ۳۹

تعداد زیرمجموعه‌های دو عضو از رابطه $\frac{n(n-1)}{2}$ و تعداد

زیرمجموعه‌های سه‌عضوی از رابطه $\frac{n(n-1)(n-2)}{6}$ به‌دست می‌آید.

$$\frac{n(n-1)(n-2)}{6} = 2 \times \frac{n(n-1)}{2}$$

$$\frac{n-2}{6} = 1 \Rightarrow n-2=6 \Rightarrow n=8$$

چون هشت‌عضوی است، تعداد زیرمجموعه‌های پنج‌عضوی و سه

$$\frac{8(8-1)(8-2)}{6} = 56 \quad \text{عضوی آن برابرند، پس:}$$

گزینه ۴۰

با توجه به صورت سؤال، معادله تشکیل می‌دهیم:

$$2^{k+3} = 2^{k-1} + 6.$$

$$2^{k+3} - 2^{k-1} = 6.$$

$$2^k (2^3 - 2^{-1}) = 6 \Rightarrow 2^k \times (8 - \frac{1}{2}) = 6.$$

$$\Rightarrow 2^k = 8 \Rightarrow k = 3$$

گزینه ۴۱

یعنی 2^{n+3} از 2^n تعداد ۴۴۸ تا بیشتر است یعنی:

$$2^{n+3} - 2^n = 448$$

$$2^n (2^3 - 1) = 448 \Rightarrow 2^n = 64 = 2^6 \Rightarrow n = 6$$

گزینه ۴۲

این سؤال راه‌حل دقیق ریاضی ندارد، باید عددگذاری کنیم تا رابطه‌ی $2^n + n = 37$ درست درآید:

$$n = 3 \Rightarrow 2^3 + 3 = 11 \quad \times$$

$$n = 4 \Rightarrow 2^4 + 4 = 16 + 4 = 20 \quad \times$$

$$n = 5 \Rightarrow 2^5 + 5 = 32 + 5 = 37 \quad \checkmark$$

گزینه ۴۳

شرط می‌زنم نصف بچه‌ها گزینه (۲) رو زدن! ... ولی سؤال n رو نفواسته عزیزان!!!

مجموعه‌ای که ۳۲ زیرمجموعه دارد، چون $2^5 = 32$

پس ۵ عضو دارد؛ کاری هم به $n-1, n, n+1$ نداریم!

گزینه ۲

مجموعه B دو عضو و A یک عضو است، پس $2^1 = 2$

گزینه ۲۹

مجموعه‌ای که ۴ عضو داشته باشد، ۱۶ زیرمجموعه دارد.

A یک عضو است؛

C سه عضو است؛ چون $2^4 = 4^2$

D عبارت است از $\{2, 1, 3\}$ ← سه عضو است.

پس فقط مجموعه‌ی B دارای ۴ عضو است:

$$4 \text{ عضو } \rightarrow \{1, 2\}, \{2\}, \{1\}, \{2, 1\}$$

گزینه ۳۰

چون حق تکرار عضو نداریم، فقط ۳ تا:

$$\{1, 5, 9\}, \{1, 3, 15\}, \{3, 3, 5\}$$

گزینه ۳۱

در A باید دو عضو ۱ و ۵ باشند و اعضای ۲ و ۳ و ۴ می‌توانند در

A هم می‌توانند باشند هم نباشند. در واقع می‌خواهیم با این اعضا

مجموعه تشکیل دهیم و به 2^4 حالت می‌توان این کار را انجام داد؛

یعنی ۱۶ مجموعه.

گزینه ۳۲

اگر A مجموعه‌ی ۵ عضو باشد، ۱، ۲، ۳ قطعاً باید در A باشد.

(چرا؟) همچنین، ۲ عضو دیگر باید از میان ۶ عضو دیگر مجموعه

بزرگ‌تر انتخاب شود تا A ، ۵ عضو باشد.

$$\frac{6 \times 5}{2} = 15 \quad \text{تعداد انتخاب ۲ عضو از ۶ عضو نیز برابر است با:}$$

گزینه ۳۳

a, d, e را کنار می‌گذاریم. با ۳ عضو دیگر می‌توان $2^3 = 8$

زیرمجموعه نوشت. سپس a, d را به همه‌ی آن‌ها اضافه می‌کنیم.

گزینه ۳۴

اعضای مشترک A و B عبارتند از a, d, f ؛ یعنی ۳ عضو. با این ۳

عضو هم، ۸ زیرمجموعه می‌توان نوشت.

گزینه ۳۵

B ابتدا ۴ عضو دارد؛ پس ۱۶ زیرمجموعه دارد. با افزایش اعضای A

به B فقط ۲ عضو به آن اضافه می‌شود (چون ۲ عضو دیگر را خود

B دارد). در نتیجه B شش‌عضوی می‌شود و $2^6 = 64$ زیرمجموعه

خواهد داشت.

$$64 - 16 = 48 \quad \text{تعداد زیرمجموعه‌های اضافه شده:}$$

گزینه ۳۶

تعداد کل زیرمجموعه‌های A ، ۱۰۲۴ تا است. ($2^{10} = 1024$)

مجموع تعداد زیرمجموعه‌های بدون عضو ($\emptyset$) و یک عضو (۱۰)

تا) برابر است با ۱۱ که از کل کم می‌کنیم:

$$1024 - 11 = 1013 \Rightarrow \text{تعداد زیرمجموعه‌های حداقل ۲ عضو}$$

۴۴ گزینه ۲

$$-2^{k+3} + 10 \times 2^k = 64$$

$$2^k(-8+10) = 64 \Rightarrow 2^k \times 2 = 64$$

$$\Rightarrow 2^k = 32 = 2^5$$

$$\Rightarrow k = 5$$

تعداد زیرمجموعه‌های ۴ عضوی با زیرمجموعه‌های ۱ عضوی برابر است در نتیجه ۵ تا زیرمجموعه‌ی ۴ عضوی دارد.

۴۵ گزینه ۱

$$A: x = \frac{1}{x} \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = 1, -1$$

$$A = \{1, -1\}$$

$$B: \frac{1}{x} = \frac{1}{4}x \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = 2, -2$$

$$B = \{2, -2\}$$

$$A \cup B = \{1, -1, 2, -2\} \Rightarrow 2^4 = 16$$

۴۶ گزینه ۴

$$\frac{2^m}{2^{m-k}} = 2^{m-m+k} = 2^k$$

۴۷ گزینه ۳

مجموعه‌ی زیرمجموعه‌ها 2^n عضو دارد؛ پس تعداد زیرمجموعه‌هایش 2^{2^n} است.

۴۸ گزینه ۲

مضارب ۵ کمتر از ۲۵ عبارتند از $5, 10, 15, 20, \dots$ یعنی ۴ عضو، با این ۴ عضو، 2^4 زیرمجموعه می‌توان نوشت.

۴۹ گزینه ۱

این نکته مهمیه که بایر به فاطر بسیارین! البته در سنامه رو ببینید نکته‌اش هست ها!!!

۵۰ گزینه ۱

این مجموعه ۱۵ زیرمجموعه‌ی غیر تهی دارد. باید حساب کنیم در چند مجموعه عدد ۱ کوچک‌ترین است، در چند مجموعه ۱۰ و ...
- تعداد زیرمجموعه‌هایی که ۱ کوچک‌ترین عضو آنها باشد، برابر است با تمام زیرمجموعه‌های شامل ۱، یعنی $2^3 = 8$ زیرمجموعه.
- تعداد زیرمجموعه‌هایی که ۱۰ کوچک‌ترین عضو آنها باشد، تمام زیرمجموعه‌هایی است که شامل ۱۰ فاقد ۱ باشند؛ می‌شوند 2^2 زیرمجموعه (۴ زیرمجموعه)

- تعداد زیرمجموعه‌هایی که ۱۰۰ کوچک‌ترین عضو باشد؛ یعنی شامل ۱۰۰ و فاقد ۱ و ۱۰ باشد، می‌شود 2^1 زیرمجموعه.
- ۱۰۰۰ هم فقط در یک مجموعه یعنی مجموعه‌ی $\{1000\}$ کوچک‌ترین عضو است.

میانگین این اعداد عبارت است از:

$$\frac{8 \times 1 + 4 \times 10 + 2 \times 100 + 1 \times 1000}{15} = \frac{1248}{15} = 83 \frac{2}{3}$$

۵۱ گزینه ۲

کل زیرمجموعه‌ها 2^{100} تاست.

زیرمجموعه‌هایی که هیچ عدد زوجی ندارند، 2^{50} تا است (زیرا ۵۰ تا عدد فرد داریم)؛ پس، بقیه زیرمجموعه‌ها حداقل یک عدد زوج دارند؛ یعنی: $2^{100} - 2^{50}$

۵۲ گزینه ۱

چون $60 + 70 > 100$ ، حتماً C و B باید اشتراک داشته باشند.

از آن جایی که جمع C و A نیز از ۱۰۰ بیشتر است؛ پس، A و C نیز اشتراک دارند؛

ولی لزومی ندارد که $A \subset C$ باشد!

فقط اینکه A و C حداقل ۳۰ عضو مشترک دارند.

چون $n(A) + n(C) = 110 > 100$

پس (ب) نیز درست نیست! B و C نیز حداقل ۳۰ عضو مشترک دارند. پس (B) حداکثر ۳۰ عضو دارد که در (C) نباشد، پس (ج) هم نادرست است.

۵۳ گزینه ۲

از A عدد ۴ را حذف می‌کنیم. حالا باید دید این مجموعه چند زیرمجموعه دارد که دو عضوی باشد و جمع دو عضو ۱۱ باشد. (چرا؟)

۳ زیرمجموعه $\Rightarrow \{5, 6\}, \{3, 8\}, \{2, 9\}$
توضیح بیشتر: اگر عدد ۴ را در این ۳ مجموعه قرار دهیم؛ می‌شود زیرمجموعه‌هایی از A که شامل ۴ هستند و جمع اعضایشان ۱۵ باشد.

۵۴ گزینه ۲

می‌دانیم هر عضوی از مجموعه در نیمی از زیرمجموعه‌ها وجود دارد و در نیم دیگرشان خیر!

پس چون مجموعه A، ۶۴ زیرمجموعه دارد، هر عضو در ۳۲ زیرمجموعه تکرار شده است؛ یعنی هر عضو ۳۲ بار؛ پس مجموع کل اعضای ۶۴ زیرمجموعه برابر است با ۳۲ برابر مجموع اعضا: $32 \times 40 = 1280$

۵۵ گزینه ۴

می‌تونید از مجموعه‌ها برای تقض بقیه‌ی گزینه‌ها مثال بزنید یا شکل رسم کنید و یا استدلال کنید. اگر موصله کنید کار سفتی نیست!

ولی دلیل درستی گزینه (۴) را می‌گوییم:

اگر $A \subseteq C$ باشد، امکان پذیر نیست؛ چرا که در این صورت $A \subseteq B$ هم خواهد شد؛ ولی طبق فرض $A \not\subseteq B$.

۵۶ گزینه ۲

یعنی ۸ زیرمجموعه دارد؛ پس ۳ عضو دارد؛ در نتیجه ۳ عضو Z و $x + y + 1$ باید تکراری باشند، از طرفی حداقل مقدار $x + y + 1$ را می‌خواهیم؛ بنابراین هر ۳ را مساوی ۸- قرار می‌دهیم:

$$2x = y + 1 = z = -8 \Rightarrow x = -4, y = -9$$

$$z = -8$$

$$\Rightarrow x + y + z = -4 + (-9) + (-8) = -21$$

۶۴ گزینه ۳

کل زیرمجموعه‌های مجموعه اولی که زیرمجموعه دومی باشند، 2^4 یعنی ۱۶ تاست.

کل زیرمجموعه‌های مجموعه اولی که زیرمجموعه سومی باشند: $2^5 = 32$ تاست. (که با اعضای ۳ و ۴ و ۵ و ۶ و ۷ ساخته می‌شوند).
در این ۲ دسته، ۴ زیرمجموعه مشترکند (زیرمجموعه‌هایی که با ۳ و ۴ ساخته می‌شوند) پس $16 + 32 - 4 = 44$
 $2^7 - 44 = 128 - 44 = 84$

۶۵ گزینه ۴

در گزینه (۱) اولی و دومی در شرایط صدق نمی‌کند. در گزینه (۲) اولی و سومی هیچ کدام زیرمجموعه دیگری نیستند! در گزینه (۳) دومی و چهارمی باعث نادرستی (۳) می‌شود! پس گزینه (۴) درست است

۶۶ گزینه ۲

تمام مجموعه‌های ممکن را می‌نویسیم:
 $\{1, 3\}, \{1, 3, 5\}, \{1, 3, 5, 7, 2\}, \{1, 3, 5, 7, 2, 6\}, \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$

۶۷ گزینه ۳

مقادیر n از ۱ تا 2^{100} است یعنی 2^{100} عضو.

۶۸ گزینه ۲

مثلاً $x = 0$ باشد، $\sqrt{x^2 + 1} = 1$ و عضو $\mathbb{Z}$ می‌شود! ولی به جز صفر برای مقادیر دیگر $\mathbb{Z}$ یا $\mathbb{N}$ چنین اتفاقی نمی‌افتد!
برای رد گزینه (۳) هم مثال بزنید: همین $x = 0$ کافی است!

۶۹ گزینه ۳

$$A = \{-2, 0, 2, 4, 6, \dots, 14\}$$

$$B = \{2, 0, -2, -4, \dots, -14\}$$

۷۰ گزینه ۲

اگر به هر عضو ۱ واحد اضافه کنیم، اعداد ۱، ۲، ۴، ۸ و ... به دست می‌آید که توان‌های ۲ هستند؛ پس اعضا به شکل $2^x - 1$ می‌باشند که x اعداد حسابی است.
پس گزینه (۲) درست است.

۷۱ گزینه ۳

مقادیر مختلفی x و y می‌توانند باشند که جمع آن‌ها کمتر یا مساوی چهار باشد؛ ساده‌تر آنکه تمام کسرهایی که مجموع صورت و مخرج آن‌ها کمتر یا مساوی ۴ باشد:

$$\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{1}, \frac{2}{2}, \frac{3}{1}$$

۷۲ گزینه ۳

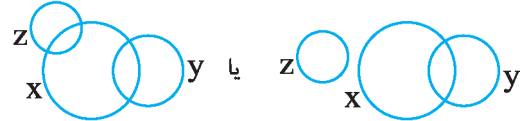
$$4n - 1 \leq 30 \rightarrow 4n < 31 \rightarrow n < \frac{31}{4},$$

$$n \in A \rightarrow n = 1, 2, \dots, 7 \rightarrow \text{عضو } 7$$

۵۷ گزینه ۳

سال‌ها قبل در صد بالایی از تست‌های وروری دبیرستان انرژی اتمی از تست‌های المپیاد بلژیک بود. کتابی به همین اسم رو آقای عبدالسین مصطفی جمع‌آوری کرده بودند که مدرسه انرژی اتمی استفاده خوبی از اون برد و تا چند سال سؤالاتش از اون کتاب بود...

مجموعه Z را در دو حالت می‌توان رسم کرد؛ چون ممکن است با X ها اشتراک داشته باشد یا نداشته باشد؛ ولی مطمئن هستیم با Y اشتراک ندارد؛ چون بخشی از X ها در Y هستند، Y و Z اشتراک ندارند در نتیجه X هایی هم هستند که Z نیست!



۵۸ گزینه ۴

باید دید به چند حالت می‌توان از بین ۶ عدد زوج، ۴ عدد و از بین ۶ عدد فرد آن، ۲ عدد فرد انتخاب کرد. انتخاب ۴ تا از ۶ تا با انتخاب ۲ تا از ۶ تا برابر است؛ پس:

$$\frac{6 \times 5}{2} = 15$$

انتخاب ۴ عدد زوج:

$$\frac{6 \times 5}{2} = 15$$

انتخاب ۲ عدد فرد:

پس طبق اصل ضرب؛ تعداد حالت‌ها در هم ضرب می‌شود:

$$15 \times 15 = 225$$

۵۹ گزینه ۳

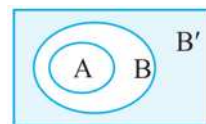
واضح است که $Y \subseteq X$ و نیز با دو مجموعه X و Y دو عضو مشترک دارد $\{1, 3\}$ ؛ پس گزینه (۳) صحیح است.

۶۰ گزینه ۳

چون در مجموعه‌ی سمت راستی عضو X وجود دارد؛ پس $\{X\}$ زیرمجموعه‌ای از آن است. گزینه (۴) چنین نیست. در گزینه (۱) و (۲) نیز مجموعه‌ها شامل حرف X نیستند!

۶۱ گزینه ۴

اگر $A \subseteq B$ باشد، آن‌گاه $B' \subseteq A'$ به این شکل دقت کنید:



۶۲ گزینه ۱

$\emptyset' = M$ پس (۱) نادرست است؛ $M' = \emptyset$ پس (۳) هم درست. گزینه (۲) و (۴) نیز درست است.

۶۳ گزینه ۳

هم A زیرمجموعه‌ی B هست، هم A' ؛ پس B مرجع است.

۷۳ گزینه ۴

می دانیم:

$$\frac{2^0}{1} \in \mathbb{Z} \Rightarrow \frac{4^0}{x} \in \mathbb{Z}$$

از طرفی $x \in \mathbb{Z}$ بنابراین مجموعه A مجموعه مقسوم علیه های صحیح عدد 4^0 است.

مقسوم علیه های صحیح 4^0 عبارتند از:

$$\pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 8, \pm 16, \pm 32, \pm 64, \pm 128, \pm 256, \pm 512, \pm 1024, \dots$$

یعنی شانزده عضوی است. تعداد زیرمجموعه های پانزده عضوی آن با تعداد زیرمجموعه های یک عضوی آن برابر است؛ یعنی ۱۶.

۷۴ گزینه ۲

اعداد 0 و -1 و $+1$ اعداد صحیح هستند که در رابطه $x^3 = x$ صدق می کنند؛ یعنی A ، 3 عضوی است؛ بنابراین 8 زیرمجموعه دارد.

۷۵ گزینه ۳

ابتدا مجموعه A را تشکیل می دهیم:

$$\begin{aligned} A &= \{-4+1, -1+1, 0+1, -1+1, -4+1\} \\ &= \{-3, 0, 1, 0, -3\} = \{-3, 0, 1\} \\ B &= \{-(-27), -0, -(1)\} \\ &= \{27, 0, -1\} \end{aligned}$$

۷۶ گزینه ۲

اولاً اعداد طبیعی که در رابطه $4 \leq \sqrt{x} \leq 7$ صدق می کند، با اعداد طبیعی که در رابطه $1 \leq \sqrt{x} \leq 4$ صدق می کند برابر است! (چرا؟) این اعداد عبارتند از: اعداد $1, 2, 3, \dots$ تا 16 که با جای گذاری در رابطه $\frac{12x}{x^2}$ (که ساده شده اش $\frac{12}{x}$ است)، اعضای A به دست می آید. ولی اعضایی را خواسته است که صحیح نباشند؛ یعنی مقسوم علیه های 12 را از 16 عضو مجموعه کنار می گذاریم. اعداد $(1, 2, 3, 4, 6, 12)$. می ماند 10 عضو که به ازای آن ها $\frac{12}{x}$ صحیح نیست.

۷۷ گزینه ۴

با توجه به اینکه $x^2 + K$ دو عدد 6 و 9 را داده است.

پس $K = 5$ (که در این صورت عضو مجموعه گزینه (۴) است): $3 \times 3 - 4 = 5 = K$

۷۸ گزینه ۲

مجموعه A چهار عضوی است و B سه عضوی، یعنی مختصات نقطه را به 12 حالت می توان نوشت. (x به چهار حالت و y به سه حالت: $4 \times 3 = 12$)

۷۹ گزینه ۳

در گزینه (۱) و (۲) رابطه $-x^2, -3^x$ همواره اعداد منفی تولید می کنند. گزینه (۴) نیز همواره عددی مثبت است.

۸۰ گزینه ۲

با جای گذاری مقادیر $1, 2, 3$ به جای n اعضای به دست آمده عبارتند از:

$$n=1 \Rightarrow x = (-1)(1-2+1)^2 = 0$$

$$n=2 \Rightarrow x = (-1)^2(4-4+1)^2 = 1 \times 1 = 1$$

$$n=3 \Rightarrow x = (-1)^2(9-6+1)^2 = -(16) = -16$$

۸۱ گزینه ۴

تمام جفت اعدادی که به جای x و y می توان قرار داد، اعداد طبیعی هستند که اختلاف آن ها 7 باشد، کوچک ترین مقدار $x^2 y$ آن است که $x=8, y=1$ باشد: $8^{2 \times 1} = 8^2 = 64$

۸۲ گزینه ۱

مقدار عددی $-(x-1)^2$ همواره عددی نامثبت است و بیشترین مقدار آن صفر است. پس، بیشترین مقدار $-(x-1)^2 + 1$ برابر است با 1 .

۸۳ گزینه ۱

$$3^x < \sqrt{11} \Rightarrow 3^x < 11$$

بزرگ ترین مقداری که در این رابطه صدق کند، $x=1$ است؛ پس بزرگ ترین مقدار $3x-5$ ، $3-5=-2$ می باشد.

۸۴ گزینه ۱

اعداد اول که یادتون هست! اگر یادتون نیست یه فکری به حال حافظه مبارک کنید، مثلاً پنیر رو با گردو مصرف کنید!!!

مقادیر 1 تا 7 را جای گذاری می کنیم:

$1^2 - 1^2 = 1$	اول نیست.
$2^2 - 2^2 = 0$	اول نیست.
$3^2 - 3^2 = -1$	اول نیست.
$4^2 - 4^2 = 0$	اول نیست.

$5^2 - 5^2 = 0$	✓
$6^2 - 6^2 = 0$	
$7^2 - 7^2 = 0$	✓

پس دو عضو، عدد اول هستند.

۸۵ گزینه ۱

$$xy = -2 \quad x, y \in \mathbb{Z}$$

$$\begin{aligned} 1) \quad x = -2, y = 1 &\Rightarrow 3(-2)^{-1} - 2(-1)^2 \\ &= -\frac{3}{2} - 2 = -\frac{7}{2} \end{aligned}$$

$$2) \quad x = 2, y = -1 \Rightarrow 3(2)^1 - 2(1)^{-2} = 6 - 2 = 4$$

$$3) \quad x = 1, y = -2 \Rightarrow 3(1)^2 - 2(2)^{-1} =$$

$$3 - 2 \times \frac{1}{2} = 3 - 1 = 2$$

$$4) \quad x = -1, y = 2 \Rightarrow 3(-1)^2 - 2(-2)^1 =$$

$$3 + 4 = 7$$

$$A = \left\{ -\frac{7}{2}, 4, 2, 7 \right\}$$

پس:

بررسی سایر گزینه‌ها:

گزینه (۱): $10^{1000} < x < 10^{10000}$, $x \in \mathbb{Z}$, پس متناهی است!

گزینه (۲): $-x > -100$ یعنی $x < 100$, $x \in \mathbb{N}$, پس متناهی است!

گزینه (۳): واضح است متناهی است. (۶ میلیارد آرم که چیزی نیست، شما بگو ۱۰ میلیارد باز هم متناهی است).

۹۲ گزینه ۲

این سؤال، سؤال مادر است! یارش بگیر!!!

نکته: سری‌هایی به شکل ۱، ۱۱، ۱۱۱ و ۲، ۲۲، ۲۲۲ و... را به

کمک مجموعه‌ی ۹، ۹۹، ... می‌توان ساخت:

$$\{9, 99, 999, \dots\} = \{10^n - 1 \mid n \in \mathbb{N}\}$$

$$\{1, 11, 111, \dots\} = \left\{ \frac{10^n - 1}{9} \mid n \in \mathbb{N} \right\}$$

$$\{2, 22, 222, \dots\} = \left\{ 2 \times \frac{10^n - 1}{9} \mid n \in \mathbb{N} \right\}$$

$$\{7, 77, 777, \dots\} = \left\{ 7 \times \frac{10^n - 1}{9} \mid n \in \mathbb{N} \right\}$$

۹۳ گزینه ۲

اعضای A را باید به دست آوریم. $\frac{x}{3} \in \mathbb{Z}$ یعنی x مضرب صحیحی از

۳ است و می‌خواهیم $x^2 + (x+2)^2$ مجذور کامل باشد، مقادیر صفر و ۲ و ۸ و ۶ باعث ساده شدن رادیکال می‌شوند؛ ولی ۲ و ۸ مضرب ۳ نیستند و فقط ۶ و ۰ اعدادی هستند که هم مضرب ۳ هستند و هم حاصل رادیکال مقدارش عضوی از اعداد طبیعی می‌شود.

۹۴ گزینه ۲

$$1 < (x-2)^2 < 25 \Rightarrow x-2 = \pm 2 \text{ یا } \pm 3 \text{ یا } \pm 4$$

$$\Rightarrow x = 4 \text{ یا } 0 \text{ یا } 5 \text{ یا } -1 \text{ یا } 6 \text{ یا } -2$$

$$12 = (-2) + 6 + (-1) + 5 + 0 + 4 = \text{جمع همگی}$$

۹۵ گزینه ۳

$$a = 3b \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{3b}{b} = 3 \text{ پس تنها عضو مجموعه ۳ است.}$$

۹۶ گزینه ۱

$$xy = 6 \Rightarrow (x, y) = (1, 6) \text{ یا } (6, 1) \text{ یا } (2, 3) \text{ یا } (3, 2)$$

$$j = \frac{3x+y}{3x-y} \Rightarrow$$

$$x, y = 1, 6 \Rightarrow j = \frac{3+6}{3-6} = \frac{9}{-3} = -3$$

$$x, y = 6, 1 \Rightarrow j = \frac{18+1}{18-1} = \frac{19}{17}$$

$$x, y = 2, 3 \Rightarrow j = \frac{6+3}{6-3} = \frac{9}{3} = 3$$

$$x, y = 3, 2 \Rightarrow j = \frac{9+2}{9-2} = \frac{11}{7}$$

پس مجموعه ۴ عضو دارد.

۸۶ گزینه ۱

حالاتی که x, y می‌تواند داشته باشد برابر است با:

$$xy = 8 \Rightarrow (x, y) = (1, 8), (2, 4), (4, 2), (8, 1)$$

$$(-1, -8), (-2, -4), (-4, -2), (-8, -1)$$

یا

بنابراین A باید ۸ عضو داشته باشد، اما:

$$2^4 = 4^2 \Rightarrow$$

یک عضو کم می‌شود

$$(-2)^{-4} = (-4)^{-2} \Rightarrow$$

یک عضو دیگر کم می‌شود

$$(-1)^{-8} = (+1)^8 \Rightarrow$$

یک عضو دیگر کم می‌شود

پس اگر ۳ عضو کم شود، لذا مجموعه A، ۵ عضوی خواهد بود.

۸۷ گزینه ۴

چون $\frac{\Delta x}{3} \in \mathbb{N}$ باید x مضرب ۳ باشد، مضارب ۳ که طبیعی هم باشند و بین ۱۰ و ۱۰۰ باشد: ۳، ۶، ۹

$$\frac{\Delta x}{3} \xrightarrow{x=3} \frac{\Delta \times 3}{3} = \Delta$$

$$\xrightarrow{x=6} \frac{\Delta \times 6}{3} = 2\Delta$$

$$\xrightarrow{x=9} \frac{\Delta \times 9}{3} = 3\Delta$$

$$A = \{\Delta, 2\Delta, 3\Delta\}$$

۸۸ گزینه ۲

مجموعه C و D: کوچک‌ترین عضو C عدد ۷- است و کوچک‌ترین عضو D برابر است با ۱.

۸۹ گزینه ۴

در گزینه (۱) مجموعه چهار عضوی است.

در گزینه (۲) مجموعه شش عضوی است؛ چون $x < y < 5$ و x, y

طبیعی هستند، حاصل $\frac{x}{y}$ برابر است با: $\frac{3}{4}, \frac{2}{4}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}$

در گزینه (۳) مجموعه بی‌شمار عضو دارد (چون $m \in \mathbb{Z}$) و در گزینه (۴)، مجموعه D فقط ۳ عضو دارد: $\sqrt{9}, \sqrt{4}, \sqrt{1}$

پس پاسخ گزینه (۴) است.

۹۰ گزینه ۲

ابتدا عبارت کسری را ساده می‌کنیم:

$$3^{x+1} \div 9^{2y} = 3^{x+1} \div 3^{4y} = 3^{x+1-4y}$$

از طرفی چون $4y - x = 2$ پس $x - 4y = -2$ است:

$$3^{x-4y+1} = 3^{-2+1} = 3^{-1} = \frac{1}{3}$$

پس:

۹۱ گزینه ۴

در گزینه (۴) اعداد حسابی بزرگ‌تر از ۱۰۱- را می‌خواهیم:

$$x+1 > -100 \Rightarrow x > -101$$

و تمام اعداد حسابی چنین‌اند؛ پس نامتناهی است.